ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ការអនុវត្តវិធីសាស្ត្របង្រៀនតាមបែបដោះស្រាយបញ្ហា និងវិធីបង្រៀនតាមបែបតុក្កតាគំនិត

(PBL & Concept Cartoons)

លើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា

ប្រើប្រាស់ថវិកាគម្រោងអភិវឌ្ឍន៍វិស័យអប់រំមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (USESDP)

ឆ្នាំ២០២០

បុព្វកថា

ការកសាងសមត្ថភាព និងការអភិវឌ្ឍធនធានមនុស្ស គឺជាគោលនយោបាយមួយក្នុងចំណោមគោលនយោបាយអាទិភាពនៃយុទ្ធសាស្ត្រចតុកោណរបស់រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជា។ ដើម្បីសម្រេចបាននូវគោលនយោបាយនេះ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានតម្រង់ទិស និងរៀបចំផែនការយុទ្ធសាស្ត្រ និងផែនការសកម្មភាពជាច្រើនដើម្បីសម្រេចនូវផែនការរបស់រដ្ឋាភិបាល។

ដើម្បីឆ្លើយតបទៅនឹងទិសដៅលើកកម្ពស់សមត្ថភាពវិជ្ជាជីវៈដល់គ្រូឧទ្ទេសនិងគ្រូបង្រៀន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានបើកវគ្គបណ្ដុះបណ្ដាល និងវគ្គបំប៉នឯកទេស និងវិធីសាស្ត្របង្រៀនជូនដល់គ្រូឧទ្ទេស និងគ្រូបង្រៀននៅតាមគ្រឹះស្ថានអប់រំនានា ក្នុងព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា សំដៅឱ្យពួកគាត់មានបំណិនសតវត្សន៍ទី២១ទាំង៤ ពោលគឺបំណិនត្រិះរិះពិចារណា បំណិនច្នៃប្រឌិត បំណិនសហការ និងបំណិនប្រាស្រ័យទាក់ទងគ្នា ព្រមទាំងមានជំនាញទាំង១០ សម្រាប់ឆ្នាំ២០២៥ ដែលស្របទៅនឹងតម្រូវការទីផ្សារការងារនៅក្នុងតំបន់ និងសកលលោក។

ការពង្រឹងកម្រិតវិជ្ជាជីវៈរបស់គ្រូឧទ្ទេស និងគ្រូបង្រៀននេះ មានសារៈសំខាន់ណាស់ ក្នុងការអភិវឌ្ឍគ្រូបង្រៀននៅគ្រប់ភូមិសិក្សា ដោយសារគ្រូឧទ្ទេស និងគ្រូបង្រៀន គឺជាតួអង្គស្នូលដ៏សំខាន់ ក្នុងការអនុវត្ត និងចែកចាយចំណេះដឹង និងជំនាញបន្ត ដល់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូដែលជាសមាជិក និស្សិត និងសិស្សានុសិស្ស និងជាកត្តាមួយជួយជំរុញដល់ការបង្រៀន និងរៀនប្រកបដោយគុណភាព និងប្រសិទ្ធភាព។ កត្តាទាំងនេះ គឺដើម្បីលើកកម្ពស់គុណវុឌ្ឍិ និងសមត្ថភាពវិជ្ជាជីវៈ ស្របតាមយុគសម័យឌីជីថល និងសង្គមពុទ្ធិ។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា មានជំនឿចិត្តយ៉ាងមុតមាំថា ឯកសារបំប៉នស្ដីពីការអនុវត្តវិធីបង្រៀនតាមទ្រឹស្ដីអប់រំបែបស្ថាបនានិយមនេះ នឹងជួយលើកកម្ពស់សមត្ថភាពគ្រូឧទ្ទេស និងគ្រូបង្រៀនឱ្យបានពេញលេញក្នុងការបង្រៀន និងរៀនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។

ជាទីបញ្ចប់ ខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណ និងកោតសរសើរចំពោះស្នាដៃដ៏ល្អរបស់ក្រុមគ្រូឧទ្ទេសវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ និងគ្រូបង្រៀនសាលាជំនាន់ថ្មី ដែលបានខិតខំអភិវឌ្ឍឯកសារបំប៉ននេះឡើង។

ថ្ងៃ[illegible] ខែ[illegible] ឆ្នាំជូត ទោស័ក ព.ស. ២៥៦៤

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី១៦ ខែវិច្ឆិកា ឆ្នាំ២០២០

រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

បណ្ឌិតសភាចារ្យ ហង់ជួន ណារ៉ុន

អារម្ភកថា

សាកលភាវូបនីយកម្មលើវិស័យសេដ្ឋកិច្ច បច្ចេកវិទ្យានយោបាយ និងវិទ្យាសាស្ត្រ បានធ្វើឱ្យពិភពលោកកាន់តែមានការប្រកួតប្រជែងគ្នា ហើយពេលខ្លះក៏សហការគ្នា ដើម្បីឈានទៅសម្រេចគោលដៅអភិវឌ្ឍសហស្សវត្សរ៍ និងអភិវឌ្ឍប្រកបដោយចីរភាព។ ស្របតាមកំណែទម្រង់ស៊ីជម្រៅក្នុងវិស័យអប់រំជាមួយការអភិវឌ្ឍធនធានមនុស្ស ប្រកបដោយ វិជ្ជាសម្បទា បំណិនសម្បទា ចរិយាសម្បទា និងកាយសម្បទាជាកត្តាកំណត់ជោគជ័យនៃការអភិវឌ្ឍលើចំណេះដឹងរបស់សិស្សឱ្យមានការរីកចម្រើនជាលំដាប់។ ដោយយោងលើបញ្ហានេះ ទើបក្រុមគ្រូឧទ្ទេសមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា ដែលជាគ្រូបង្គោលថ្នាក់ជាតិបានសម្រេចលើកយកខ្លឹមសារ «វិធីសាស្ត្របង្រៀន និងរៀនគណិតវិទ្យាតាមបែបដោះស្រាយចំណោទបញ្ហា និងតុក្កតាគំនិត» ទៅក្នុងកម្មវិធីវិក្រិតការគ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យាថ្នាក់ជាតិ ដើម្បីធ្វើឱ្យសិក្ខាកាមអាចបញ្ជ្រាបខ្លឹមសារវិធីសាស្ត្រទាំងនេះ ដល់គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅតាមសាលាវិទ្យាល័យនានា នៅទូទាំងរាជធានីខេត្តនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា។

ការប្រើប្រាស់យុទ្ធវិធីដោះស្រាយចំណោទបញ្ហា និងតុក្កតាគំនិតក្នុងការរៀន និងបង្រៀនគណិតវិទ្យាជាចំណែកមួយក្នុងការពង្រឹង និងពង្រីកចំណេះដឹងរបស់សិស្ស ធ្វើឱ្យគុណភាពនៃការរៀន និងបង្រៀនកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពខ្ពស់បន្ថែមមួយកម្រិតទៀត។ ការប្រើប្រាស់វិធីនៃការរៀន និងបង្រៀនបែបដោះស្រាយចំណោទបញ្ហាមានចំណុចសំខាន់ៗដូចជា៖ ១. ការយល់បញ្ហា ២. ការបង្កើតផែនការ ៣. ការអនុវត្តផែនការ និង៤.ការពិនិត្យសារឡើងវិញ។ ការប្រើប្រាស់វិធីនៃការរៀន និងបង្រៀនបែបតុក្កតាគំនិតគឺជាការបណ្តុះគំនិតឱ្យសិស្សចេះគិត ចេះពិភាក្សា និងចេះលើកសួរថ្មីៗ ក៏ដូចជាឱ្យសិស្សចេះសង្កេត និងលើកហេតុផលជំទាស់។ ចំណុចសំខាន់ៗទាំងនេះជាចលករសម្រាប់សិស្សក្នុងការរៀនគណិតវិទ្យា ដើម្បីទទួលបានចំណេះដឹងមួយពេញលេញ និងមានគុណភាព។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សិក្ខាកាមទាំងអស់ដែលជាគ្រូគណិតវិទ្យាដែលកំពុងបង្រៀននៅកម្រិតអនុវិទ្យាល័យឡើងទៅ នឹងព្យាយាមស្តាប់ការពន្យល់របស់គ្រូឧទ្ទេសដោយយកចិត្តទុកដាក់ និងសិក្សាស្វែងយល់អត្ថន័យដោយខ្លួនឯងពីការបង្រៀនតាមបែបដោះស្រាយចំណោទបញ្ហា និងតុក្កតាគំនិតនេះ ដើម្បីក្រេបជញ្ជក់យកខ្លឹមសារ និងគំរូនៃការបង្រៀនថ្មីៗ ទុកជាទុនក្នុងបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅតាមវិទ្យាល័យបន្ត និងបណ្តុះបណ្តាលដល់សិស្សរបស់ខ្លួន ឱ្យក្លាយជាសិស្សដែលចូលចិត្តរៀនមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា និងរៀនពូកែលើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យាថែមទៀតផង។

យើងខ្ញុំដែលជាគ្រូឧទ្ទេសគណិតវិទ្យាទាំងអស់នៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ មានការរីករាយ នឹងទទួលយកនូវការរិះគន់ទាំងឡាយ ដើម្បីកែលម្អរពីសំណាក់លោកគ្រូអ្នកគ្រូ ជាពិសេសសិក្ខាកាម ចំពោះចំណុចខ្វះខាត និងកំហុសឆ្គងក្នុងការរៀបចំឯកសារនេះឡើងដោយអចេតនារបស់ក្រុមយើងខ្ញុំ។

ថ្ងៃ......................ខែ............ឆ្នាំ......ទោស័ក ព.ស.២៥៦៤

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី......ខែ.........ឆ្នាំ២០២០

គ្រូឧទ្ទេសគណិតវិទ្យា

១. គណៈកម្មការគ្រប់គ្រង

១-ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ហង់ជួន ណារ៉ុន** រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

២-ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ណាត ប៊ុនរឿន** រដ្ឋលេខាធិការក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

៣-ឯកឧត្តមបណ្ឌិត **សៀង សុវណ្ណា** នាយកវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

៤-លោក **ឌី បុណ្ណា** នាយករងវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

៥-បណ្ឌិត **នួច វិរ៉ា** នាយករងវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

៦-លោកស្រី **ម៉ុន សុផានី** នាយិការងវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

៧-លោក **ថៃ ហេង** នាយករងវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

២. គណៈកម្មការនិពន្ធ រៀបរៀង និងចងក្រងសៀវភៅ

១-គ្រូឧទ្ទេស **គណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្រ** វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

២-គ្រូបង្រៀន **គណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្រ** សាលាជំនាន់ថ្មី

៣. គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ និងកែលម្អ

១-លោក **ម៉ៅ សារឿន** ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់អប់រំនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

២-លោក **ចេង ថុន** អនុប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់អប់រំនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

៣-លោក **គឹម លាង** អនុប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់អប់រំនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

មាតិកា

បុព្វកថា i

អារម្ភកថា ii

មេរៀនទី១ ៖ វិធីសាស្ត្របង្រៀនតាមបែបដោះស្រាយបញ្ហា 1

១.១.គោលបំណង 1

១.២.ប្រវត្តិនៃការបង្រៀនបែបដោះស្រាយបញ្ហា 1

១.៣.ជំហានទាំង៤របស់លោកប៉ូលៀ (George Polya ១៩៥៧) 2

១.៤.យុទ្ធវិធីផ្សេងៗក្នុងការដោះស្រាយចំណោទបញ្ហា 3

១.៥.ឧទាហរណ៍ជំហានទាំងបួនរបស់លោក ប៉ូលៀ 5

១.៥.១.ការយល់បញ្ហា 5

១.៥.២.ការបង្កើតផែនការ និងការអនុវត្តផែនការ 5

១.៥.៣.ការពិនិត្យមើលឡើងវិញ 6

១.៦.ឧទាហរណ៍ និងលំហាត់នៃយុទ្ធវិធីទាំង១០ 6

១.៦.១.ការទស្សន៍ទាយ និងការធ្វើតេស្តបែបវៃឆ្លាត 6

១.៦.២.ការដោះស្រាយលំហាត់ស្រដៀងគ្នា ប៉ុន្តែងាយជាង 10

១.៦.៣.ការគូររូបតាង 11

១.៦.៤.ការកំណត់ហេតុផលឡូស៊ិក 13

១.៦.៥.សម្រាយបញ្ជាក់ដោយមិនផ្ទាល់ 14

១.៦.៦.ការគិតបែបអនុមានរួម 15

១.៦.៧.ការធ្វើការងារបញ្ច្រាស 17

១.៦.៨.ការកែប្រែចំណោទ 18

១.៦.៩.ពិសេសកម្ម និងទូទៅកម្ម 20

១.៦.១០.ការងាកទៅមើលនិយមន័យ 21

មេរៀនទី ២ ៖ ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ 23

២.១.ព្រីមីទីវ 23

២.១.១.និយមន័យ 23

២.១.២.ទ្រឹស្តីបទ 24

២.២.អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ 26

២.២.១.និយមន័យ 26

២.២.២.រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ 26

២.២.៣.អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $y=\dfrac{1}{x}, y=e^x$ និង $y=a^x\,;(a>0\,,a\neq 1)$ 29

២.២.៤.អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ 31
២.២.៥.ការគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដោយប្រើអថេរជំនួស និងអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក 32
២.២.៦.អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន 37
២.៣.អនុវត្តន៍អាំងតេក្រាល 42
កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូ១ 50
កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី២ 55
កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី៣ 59
កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី៤ 63
មេរៀនទី៣ ៖ តុក្កតាគំនិត (Concept Cartoons) 67
៣.១.ការណែនាំអំពីតុក្កតាគំនិត (Introduction of Concept Cartoons) 67
៣.២.គន្លឹះសំខាន់នៃតុក្កតាគំនិត (Tips of concept cartoons) 70
៣.៣.តើតុក្កតាគំនិតអាចត្រូវបានប្រើក្នុងមេរៀនយ៉ាងដូចម្តេច? 71
៣.៤.គំនិតតុក្កាជាយុទ្ធសាស្ត្របង្រៀន (Concept Cartoons as Teaching Strategy) 72
៣.៥.ការប្រើប្រាស់តុក្កតាគំនិត (Using Concept Cartoons) 74
មេរៀនទី៤ ៖ អាំងតេក្រាលកំណត់ 75
៤.១.និយមន័យ 75
៤.២.លក្ខណៈអាំងតេក្រាលកំណត់ 82
៤.៣.គណនាក្រឡាផ្ទៃ 87
៤.៤.គណនាប្រវែងខ្សែកោង 96
៤.៥.គណនាមាឌ 97
កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី១ 171
កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី២ 176
សន្លឹកកិច្ចការក្រុម 179
កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី៣ 180
កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី៤ 184
ឯកសារយោង 187

មេរៀនទី១ ៖ វិធីសាស្ត្របង្រៀនតាមបែបដោះស្រាយបញ្ហា

វិធីសាស្ត្របង្រៀនតាមបែបដោះស្រាយបញ្ហា (Problem Solving Methodology) គឺជាវិធីគោលបង្រៀនបែបសិស្សមជ្ឈមណ្ឌលមួយ ដែលគេប្រើប្រាស់ជាជំហានៗ ដើម្បីឱ្យសិស្សរៀនស្វែងរកដំណោះស្រាយនៃបញ្ហា និងឧបសគ្គនានានៅក្នុងបញ្ញត្តិ ឬខ្លឹមសារដែលបានចោទសួរតាមរយៈការសាកល្បងទៀតច្រើនលើកច្រើនសារ ដោយវិធីផ្សេងៗរហូតដល់ពួកគេទទួលបានជោគជ័យ។ វាជាការចាំបាច់ណាស់សម្រាប់ឱ្យសិស្សទាំងអស់ចេះពីរបៀបដោះស្រាយបញ្ហានានា ឬគណនាលំហាត់នៅក្នុងចំណោទបញ្ហាណាមួយរបស់ខ្លឹមសារមេរៀន ដោយមិនចំពោះតែអ្នកសិក្សាលើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា វិទ្យាសាស្ត្រទេ។ អ្នកសិក្សាវិទ្យាសាស្ត្រសង្គមក៏អាចប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រនេះ នៅក្នុងថ្នាក់រៀន និងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃបានដែរ។

១.១.គោលបំណង

- បង្ហាញវិធីសាស្ត្រមួយសម្រាប់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូក្នុងការបង្រៀនសិស្សឱ្យមានប្រសិទ្ធភាពខ្ពស់
- ជួយឱ្យគ្រូបង្រៀនយល់កាន់តែច្បាស់ពីមូលហេតុដែលនាំឱ្យគ្រូត្រូវបង្រៀនដំណោះស្រាយចំណោទបញ្ហាដល់សិស្ស
- អាចអនុវត្តជំហានរបស់លោកប៉ូលៀ (George Polya) សម្រាប់ការបង្រៀនដំណោះស្រាយចំណោទបញ្ហា ឬបញ្ហានានាក្នុងថ្នាក់រៀនបាន
- អាចស្វែងរកយុទ្ធវិធី និងគន្លឹះសំខាន់ៗ សម្រាប់ដោះស្រាយចំណោទបញ្ហា លើការបង្រៀនក្នុងថ្នាក់រៀនបាន
- យល់ពីរបៀបនៃការធ្វើកិច្ចតែងការបង្រៀនតាមបែបដោះស្រាយបញ្ហា ដើម្បីឱ្យការបង្រៀនទទួលបានលទ្ធផលល្អ។

១.២.ប្រវត្តិនៃការបង្រៀនបែបដោះស្រាយបញ្ហា

លោក Thomas J. D'Zurilla ក្នុងឆ្នាំ១៩៨៨ បានកំណត់ថា ការដោះស្រាយបញ្ហា គឺជាដំណើរការអាកប្បកិរិយាដែលបានជះឥទ្ធិពលដល់ចំណេះដឹងតាមរយៈការចូលរួមរបស់បុគ្គល ឬក្រុម ដើម្បីកំណត់បាននូវបញ្ហា ការស្វែងរកដំណោះស្រាយ ឬការបង្កើតមធ្យោបាយថ្មីសម្រាប់ដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ។

ហេតុអ្វីបានជាគ្រូគួរបង្រៀនសិស្សតាមវិធីសាស្ត្របែបដោះស្រាយបញ្ហា?

វាចំបាច់ណាស់សម្រាប់ឱ្យសិស្សចេះរបៀបដោះស្រាយលំហាត់ សំណួរ និងការវិភាគនៅពេលអនាគត មិនថានៅក្នុងមុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រ មុខវិជ្ជាសង្គម និងអក្សរសាស្ត្រខ្មែរ ឬនៅក្នុងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃទេ។ លោក Posamentier and Stepelman (1999) បានបង្ហាញអំពីផលិតផលបន្ទាប់បន្សំនៃការដោះស្រាយលំហាត់ និងការវិភាគសំណួរបានលុះត្រាតែសិស្សធ្វើតាមសំណើទាំង០៣ខាងក្រោម៖

១. សិស្សត្រូវរៀនអានអត្ថបទ និយមន័យ សំណួរទៅលើមុខវិជ្ជាដែលខ្លួនបានរៀនមានដូចជា៖ គណិតវិទ្យា វិទ្យាសាស្ត្រ អក្សរសាស្ត្រខ្មែរ និងប្រវត្តិវិទ្យាជាដើម។

២. សិស្សនឹងទទួលបាននូវការអភិវឌ្ឍគំនិតផ្ទាល់ខ្លួនរបស់ពួកគេ ដើម្បីដោះស្រាយចំណោទបញ្ហាដោយផ្អែកលើការត្រិះរិះពិចារណា

៣. សិស្សនឹងរៀនរកកំហុស និងវិភាគគំនិតដែលដាក់ឱ្យពួកគេអនុវត្ត។

ទី១៖ តាមរយៈការពិសោធន៍អំពីដំណោះស្រាយលំហាត់ ឬសំណួរមួយចំនួន សិស្សអាចដឹងថា សូម្បីតែមួយឃ្លា ឬមួយប្រយោគក៏អាចមានព័ត៌មានច្រើនប្រកបដោយអត្ថន័យផងដែរ ហើយសិស្សក៏អាចដឹងបានដែរថា ការអានដ៏ប្រុងប្រយ័ត្ន ឬអានសារចុះសារឡើង ឬការពិនិត្យមើលសារចុះសារឡើងទៅលើប្រយោគអត្ថបទសំណួរ លំហាត់នៃមុខវិជ្ជាអក្សរសាស្ត្រខ្មែរនាំឱ្យមានគំនិតយល់ច្បាស់នឹងយុទ្ធវិធីសមស្របសម្រាប់ដោះស្រាយ។ សិស្សក៏អាចដឹងដែរថាការអានត្រួសៗ ឬការលឿនពេកមានប្រយោជន៍តិចតួចណាស់ក្នុងការដោះស្រាយសំណួរ ការវិភាគ ការវាយតម្លៃ ។ល។

ទី២៖ សិស្សដែលបានទទួលការបណ្តុះបណ្តាលលើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យាបានច្រើនឆ្នាំអាចយល់បានថាតើគេបានអភិវឌ្ឍបំណិនដោះស្រាយលំហាត់ សំណួររបស់ខ្លួននៅក្នុងរយៈពេលនោះបានយ៉ាងដូចម្តេច? ពួកគេនឹងមានទឹកចិត្តដោយបានឃើញអំពីការរីកចម្រើនរបស់ខ្លួនលើផ្នែកបំណិនដោះស្រាយចំណោទ និងការវិភាគបញ្ហា។ បទពិសោធន៍ប្រកបដោយជោគជ័យនេះជាបន្តបន្ទាប់នឹងធ្វើឱ្យសិស្សចូលចិត្ត និងចង់រៀនមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា ដែលផ្តោតសំខាន់ទៅលើបំណិននៃការអាន និងការធ្វើវិភាគ។

ទី៣៖ សិស្សអាចទទួលបាននូវគំនិតវិភាគ និងចេះរកគុណវិបត្តិ និងគុណសម្បត្តិនៃបញ្ហាក្នុងការសិក្សាខ្លឹមសារមេរៀនតាមរយៈបទពិសោធន៍ក្នុងការវិភាគសន្និដ្ឋាន។ ប្រសិនអំណះអំណាងនៃការវិភាគមិនមានបម្រាប់គ្រប់គ្រាន់ ឬមានបម្រាប់លើសលុប ឬគ្មានដំណោះស្រាយ សិស្សអាចរកឃើញភាពមិនសមស្របនៃអំណះអំណាងនោះ ហើយធ្វើការវិភាគដោយរៀបអំណះអំណាងឡើងវិញ ដើម្បីឱ្យវាមានន័យគ្រប់គ្រាន់។ សកម្មភាពនេះអាចជួយឱ្យសិស្សចេះគិតពីចំណោទបញ្ហា និងលំហាត់បានស៊ីជម្រៅ។

១.៣.ជំហានទាំង៤របស់លោកប៉ូលៀ (George Polya ១៩៥៧)

លោក ប៉ូលៀ (១៩៥៧) បានពិពណ៌នាអំពីផែនសម្រាប់ដោះស្រាយលំហាត់ និងការវិភាគបញ្ហា និងការបង្រៀនត្រូវមាន០៤ជំហានប្រទាក់ក្រឡាគ្នាដូចខាងក្រោម៖

១. **ការយល់ពីបញ្ហា** (Understanding the problem)៖ ផ្តោតទៅលើការអានដោយម៉ត់ចត់ដើម្បីឱ្យដឹងថាអ្វីខ្លះជាបម្រាប់ និងជាសំណួរតើគេចង់បានអ្វី ឬចង់រកអ្វី។

២. **ការបង្កើតផែនការ** (Devising a plan)៖ ត្រូវពិនិត្យមើលថាតើគេមាននិយមន័យ ទ្រឹស្តី រូបមន្តលក្ខខ័ណ្ឌ និងយុទ្ធវិធីអ្វីខ្លះដែលគេអាចយកមកប្រើប្រាស់ សម្រាប់ដោះស្រាយលំហាត់បាន។

៣. **ការអនុវត្តផែនការ** (Carrying a plan)៖ ដោះស្រាយតាមជំហាននីមួយៗឱ្យបានត្រឹមត្រូវ។

៤. **ការពិនិត្យឡើងវិញ** (Looking Back)៖ ត្រូវពិនិត្យដំណោះស្រាយរបស់ខ្លួនថាតើដំណោះស្រាយរបស់ខ្លួនពុំមានកំហុសឆ្គងណាមួយឡើយ ឬមិនបានប្រើប្រាស់លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ ឬមានរបៀបដោះស្រាយផ្សេងដែរ ឬទេ។

ជំហានទី១ (ការយល់ពីបញ្ហា)៖ មិនគ្រាន់មានន័យត្រឹមតែយល់ប្រយោគដែលគេឱ្យប៉ុណ្ណោះទេ ជំហាននេះតម្រូវឱ្យមានអ្នកដោះស្រាយលំហាត់ កំណត់បញ្ហាឱ្យបានច្បាស់អំពីលក្ខខណ្ឌដែលគេឱ្យ និងអ្វីដែលគេត្រូវរកទោះបីជាសិស្សភាគច្រើនមើលរំលងលក្ខខណ្ឌដែលគេឱ្យ ឬមានការភ័ន្តច្រឡំទៅ**ពាក្យស្គាល់** និង**មិនស្គាល់** ឬយល់ច្រឡំអំពីអ្វីដែលពួកគេត្រូវធ្វើក៏ដោយ។

ជំហានទី២ (ការបង្កើតផែនការ)៖ រួមមានការវិភាគអំពីទំនាក់ទំនងរវាងអ្វីដែលមិនស្គាល់ លក្ខខណ្ឌដែលគេឱ្យនិងចំណេះដឹង និងបទពិសោធន៍ដែលទទួលបានកាលពីអតីតកាល ដើម្បីបង្កើតយុទ្ធវិធីសម្រាប់ដោះស្រាយលំហាត់ និងការវិភាគ។ នៅក្នុងដំណាក់កាលនេះ អ្នកដោះស្រាយតម្រូវឱ្យគិតថា តើអ្វីជាអំណះអំណាង ឬសំណើសមមូល? ថាតើអ្វីដែលគេស្គាល់ និងមិនស្គាល់ មានទំនាក់ទំនងគ្នាឬទេ? ថាតើគេអាចកែសម្រួលបញ្ហាដែលស្គាល់ និងមានទ្រឹស្តីបទអ្វីខ្លះដើម្បីយកមកពិចារណា។ ថាតើពួកគេបានប្រើប្រាស់លក្ខខណ្ឌ និងទិន្នន័យទាំងអស់ដែលគេឱ្យឬទេ? ថាតើពួកគេត្រូវដោះស្រាយបញ្ហាតាមយុទ្ធវិធីអ្វីខ្លះ?

ជំហានទី៣ (ការអនុវត្តផែនការ)៖ អ្នកដោះស្រាយលំហាត់ត្រូវចាប់ផ្តើមដោះស្រាយលំហាត់ដោយប្រើប្រាស់នូវអ្វីដែលមានក្នុងជំហានមុនៗ។ អ្នកពិតជាគិតថា វាមិនមែនជាដំណើរការសាមញ្ញទេ ពីព្រោះអ្នកដោះស្រាយបញ្ហាត្រូវតែពិនិត្យមើលថា តើជំហាននីមួយៗនៃដំណោះស្រាយរបស់ខ្លួនត្រឹមត្រូវឬទេ? ហើយជួនកាលពួកគេត្រូវតែស្រាយបញ្ជាក់វា ប្រសិនបើវាទំនងជាមិនច្បាស់លាស់។ នៅក្នុងករណីជាច្រើន ពួកគេមិនយល់ច្បាស់ទេ ថាហេតុអ្វីបានជាវាត្រឹមត្រូវក្នុងខណៈពេលដែលពួកគេបានរៀនវា។

ជំហានទី៤ (ការពិនិត្យឡើងវិញ)៖ អ្នកដោះស្រាយបញ្ហាគួរតែពិនិត្យមើលដំណោះស្រាយរបស់ខ្លួនឡើងវិញ និងជំហាននៃការឈានផ្សេងៗទៅដល់ដំណោះស្រាយនោះ។ ទោះបីជាមានអ្នកដោះស្រាយបញ្ហាភាគច្រើនបានឈានទៅដោះស្រាយបញ្ហាផ្សេងមួយទៀត បន្ទាប់ពីពួកគេរកឃើញចម្លើយហើយក៏ដោយ ឥរិយាបថបែបនេះជារឿយៗនាំទៅដល់ការយល់ចន្លោះប្រហោងនៃទ្រឹស្តី។ ពួកគេអាចគិតថា តើការរកដំណោះស្រាយត្រឹមត្រូវឬទេ? ថាតើការវិភាគរបស់ពួកគេបានគ្រប់គ្រាន់ច្បាស់លាស់ដែរឬទេ? ថាតើមានដំណោះស្រាយផ្សេងទៀតដែរឬទេ? តើដំណោះស្រាយមានន័យយ៉ាងដូចម្តេច? តើមានភាពជាក់លាក់ និងភាពទូទៅអ្វីខ្លះអាចត្រូវបានគេពិចារណា?

១.៤.យុទ្ធវិធីផ្សេងៗក្នុងការដោះស្រាយចំណោទបញ្ហា

លោក Larson (1983), Tsukahara (1994), Posamentier and Krulic (1998) បានរកឃើញយុទ្ធវិធីដោះស្រាយចំណោទបញ្ហាជាច្រើនដូចជា៖

Larson (1983)	Tsukahara (1994)	Posamentier and Krulic (1998)
- ស្រាវជ្រាវរកលំនាំគំរូ (Searching for a pattern) - សង់ក្រាប (Drawing a figure) - ប្រើរូបមន្ត (Formulating an equivalent problem) - កែសម្រួលលំហាត់ (Modifying the problem)	- ភាពដូចគ្នា (Analogy) - សម្រាយបញ្ច្រាស់ (working backward) - មើលនិយមន័យ (Back to definition) - កែទម្រង់ (Reformation) - សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់ (Indirect proof) - បន្ថយអថេរ (Fewer variables)	- សម្រាយបញ្ច្រាស់ (working backward) - រកលំនាំគំរូ (Finding a pattern) - កំណត់យកចំណុចទស្សនៈមួយផ្សេងទៀត (Adopting a different point of view) - ដោះស្រាយលំហាត់ដូចគ្នាប៉ុន្តែងាយជាង (Solving a

- ប្រើប្រាស់និមិត្តសញ្ញាដ៏មានប្រសិទ្ធភាព (Choosing effective notation) - រិះរកភាពឆ្លុះ (Exploiting symmetry) - បែងចែកតាមករណីមួយៗ (Dividing into cases) - សម្រាយបញ្ច្រាស់ (working backward) - លើកជាសំណើផ្ទុញ (Arguing by contradiction) - ស្វែករកភាពស្មើគ្នា (Pursuing parity) - ពិចារណាករណីចម្បងៗ (Considering extreme cases) - រកភាពទូទៅ (Generalization)	- ភាពឆ្លុះ (Symmetry) - ហេតុផលឡូស៊ិក (Logical reasoning) - ភាពជាក់លាក់ និងភាពទូទៅ (Specialization and generalization) - ការគិតតាមបែបអនុមានរួម (Inductive thinking)	simpler analogous problem) - ពិចារណាករណីចម្បងៗ (Considering extreme cases) - សង់ក្រាប (Making a drawing) - ការទស្សន៍ទាយ និងធ្វើតេស្តបែបវៃឆ្លាត (Intelligent guessing and testing) - គណនេយ្យគ្រប់លទ្ធភាពទាំងអស់ (Accounting all possibilities) - រៀបចំទន្និន័យ (Organizing data) - ហេតុផលឡូស៊ិក (Logical reasoning)

ក្នុងចំណោមយុទ្ធវិធីទាំងនេះយើងគួរសិក្សានូវយុទ្ធវិធីទាំង ១០ ដូចខាងក្រោម៖

១. ការទស្សន៍ទាយ និងធ្វើតេស្តបែបវៃឆ្លាត

២. ការដោះស្រាយលំហាត់ស្រដៀងគ្នា ប៉ុន្តែងាយជាង

៣. ការគូររូបតាង

៤. ការកំណត់ហេតុផលបែបឡូស៊ិក

៥. ការស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រយោល

៦. ការស្រយបញ្ជាក់តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

៧. ធ្វើការងារបញ្ច្រាស់

៨. កែប្រែចំណោទ

៩. ពិសេសកម្ម និងទូទៅកម្ម

១០. ងាកទៅមើលនិយមន័យ

១.៥.ឧទាហរណ៍ជំហានទាំងបួនរបស់លោក ប៉ូលៀ

១.៥.១.ការយល់បញ្ហា

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយដែលមានជ្រុង $x,\ x+1,\ x+2$ ជាត្រីកោណសាមញ្ញដែលមានមុំទាលមួយ។ ចូររកវ៉ង់ នៃតម្លៃ x ។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់នេះផ្តល់ព័ត៌មានមួយចំនួនដូចជាប្រវែងជ្រុងត្រីកោណ ABC គឺ $x,\ x+1$ និ $x+2,\ ABC$ ជាត្រីកោណសាមញ្ញដែលមានមុំទាលមួយ។ អ្នកអាចចងចាំថា តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស នោះលក្ខណៈនៃត្រីកោណមានមុំទាលគឺ $a^2+b^2<c^2$ ដែល c ជាប្រវែងជ្រុងដែលវែងជាងគេ។

នោះយើងបាន៖

$x^2+(x+1)^2<(x+2)^2$

សមមូល $(x-3)(x+1)<0$

សមមូល $-1<x<3$

ដោយ $x>0$ នាំឱ្យ $0<x<3$ ។ តើចម្លើយនេះត្រឹមត្រូវឬទេ ? បើមិនត្រឹមត្រូវចូរកែតម្រូវ។

ចម្លើយនេះមិនត្រឹមត្រូវទេ ព្រោះ បើ $x=0.5$ នោះផលបូកជ្រុងពីរតូចជាងជ្រុងមួយ។ កំហុសនេះកើតមកពីការយល់លំហាត់មិនគ្រប់គ្រាន់។ អ្នកភ្លេចលក្ខខណ្ឌដែលថា ផលបូកប្រវែងជ្រុងពីរធំជាងប្រវែងជ្រុងមួយនៅសល់។

មានន័យថា $x+(x+1)>x+2$ នាំឱ្យ $x>1$ ។

ដូចនេះ ចម្លើយត្រឹមត្រូវគឺ $1<x<3$ ។

១.៥.២.ការបង្កើតផែនការ និងការអនុវត្តផែនការ

ឧទាហរណ៍៖ ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាងរឺស្មើ 1, ចូររកចំនួនបឋមដែលចែកចំនួន

$a_n=19^n+(-1)^{n-1}.2^{4n-3}$ ដាច់ដោយគ្មានសំណល់។

ស្រាយបញ្ជាក់

គន្លឹះក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់នេះគឺសម្រួលលំហាត់ឱ្យងាយ

ដូចខាងក្រោម៖

ពេល $n=1, a_1=21=3\times 7$

ពេល $n=2, a_1=329=7\times 47$

ដូច្នេះ យើងអាចសន្និដ្ឋានថា a_n អាចចែកដាច់នឹង 7 ប៉ុន្តែយើងមិនអាចសន្និដ្ឋានថាចម្លើយគឺ 7 ទេ ពីព្រោះវានៅតែជាការទស្សន៍ទាយតែប៉ុណ្ណោះ។ ដើម្បីបង្ហាញការសន្និដ្ឋានរបស់យើងដែលថា a_n អាចចែកដាច់នឹង 7 តាមរយៈអនុមានរួមគណិតវិទ្យា នេះហើយគឺជាការបង្កើតផែនការ ឬជាយុទ្ធវិធីដោះស្រាយលំហាត់។ ចូរអ្នកស្រាយបញ្ជាក់លំហាត់នេះតាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា។

បន្ទាប់ពីបង្កើតផែនការ យើងត្រូវអនុវត្តន៍ផែនការ ។

ឥឡូវយើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n=19^n+(-1)^{n-1}.2^{4n-3}$ ចែកដាច់នឹង 7 ដូចខាងក្រោម៖

ពេល $n=1$ នាំឱ្យ $a_1=21=3.7$ ចែកដាច់នឹង 7 ពិត

សន្និដ្ឋានថាវាពិតចំពោះ $n=k$ នាំឱ្យ $a_k=19^k+(-1)^{k-1}.2^{4k-3}=7m$ (m ជាចំនួនគត់)

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$ នាំឱ្យ

$$a_{k+1}=19^{k+1}+(-1)^{k+1-1}.2^{4(k+1)-3}$$

$$a_{k+1}=19.19^k-16(-1)^{k-1}.2^{4k-3}$$

$$a_{k+1}=35.19^k-16.7m$$

$a_{k+1}=7(5.19^k-16m)$ ចែកដាច់នឹង 7 ពិត ។

ដូចនេះ ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាងរឺស្មើ 1, ចំនួនបឋម 7 ចែកចំនួន

$a_n=19^n+(-1)^{n-1}.2^{4n-3}$ ដាច់ដោយគ្មានសំណល់។

១.៥.៣.ការពិនិត្យមើលឡើងវិញ

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យចំណុច $A(-a,0)$ និង $B(a,0)$, ចូររកសំណុំចំណុចនៃចំណុច P នៅលើប្លង់មួយដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌមុំ APB ស្មើ 90° ។

ដំណោះស្រាយ

ដើម្បីយល់លំហាត់នេះ អ្នកត្រូវដឹងថា សំណុំចំណុចជាអ្វី? សំណុំចំណុច គឺជាសំណុំនៃចំណុចទាំងឡាយណាដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ ឬក៏ត្រូវបានកំណត់ដោយលក្ខខណ្ឌកំណត់ណាមួយ។

ដូចនេះលក្ខខណ្ឌ មុំ APB ស្មើ 90° មានន័យថា PA កែងនឹង PB ឬក៏, $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}=0$

តាង $P(x,y)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}=0$

សមមូល $(x-a)(x+a)+y^2=0$ នាំឱ្យ $x^2+y^2=a^2$

ដូចនេះសំណុំចំណុច គឺជារង្វង់ដែលមានផ្ចិត $(0,0)$ និង កាំ a ។

តើលំហាត់នេះចប់ត្រឹមនេះ ឬក៏មានចម្លើយតទៅទៀត? បើមានចម្លើយតទៅទៀត ចូរធ្វើចម្លើយបន្ត។

ចម្លើយនេះមិនទាន់ត្រឹមត្រូវគ្រប់លក្ខខណ្ឌនៅឡើយទេ

ពីព្រោះលក្ខខណ្ឌមុំ APB ស្មើ 90° មិនគ្រាន់មានន័យថា $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}=0$ ប៉ុណ្ណោះទេ

ថែមទាំងមានន័យថាអង្កត់ PA និង PB កើតមាន ឬ $PA\neq 0, PB\neq 0$ ។

$PA\neq 0$ នាំឱ្យ $x\neq a, y\neq 0$ និង $PB\neq 0$ នាំឱ្យ $x\neq -a, y\neq 0$

ដូច្នេះ កូអរដោនេរបស់ P មិនអាចជា $(a,0)$ និង $(-a,0)$ ទេ ។

នេះមានន័យថាសំណុំចំណុចគឺជារង្វង់ផ្ចិត $(0,0)$ និង កាំ a

លើកលែងត្រង់ ចំណុច $(a,0)$ និង $(-a,0)$ ។

១.៦.ឧទាហរណ៍ និងលំហាត់នៃយុទ្ធវិធីទាំង១០

១.៦.១.ការទស្សន៍ទាយ និងការធ្វើតេស្តបែបថៃឆ្លាត

យុទ្ធវិធីនេះមានសារៈប្រយោជន៍ណាស់នៅពេលចាំបាច់ ដែលត្រូវបង្រួមជំរើសនៅក្នុងដំណើរការរកចម្លើយត្រឹមត្រូវ។ នៅក្នុងយុទ្ធវិធីនេះយើងធ្វើការទស្សន៍ទាយ និងបន្ទាប់មកធ្វើតេស្តវាថាតើវាបំពេញលក្ខខណ្ឌដែលគេឱ្យ ឬទេ?

១.ការអនុវត្តន៍លើជីវភាពរស់នៅជាក់ស្តែង

តើការប្រព្រឹត្តិទៅនៃជីវិតរបស់មនុស្សក្នុងដំណាក់កាលនៃការរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ អនាគត និងដំណាក់កាលនៃចុងបញ្ចប់តើវាទៅជាយ៉ាងណា?

ក. លេខអច្ឆរិយៈ

យើងមានលេខពី ៥០ដល់ ៩៩ ។ ចូរអ្នកជ្រើសរើសមួយលេខនៅចន្លោះលេខនេះដែលអ្នកពេញចិត្តថាជាលេខសំណាងក្នុងជីវិតរបស់អ្នក រួចយកលេខដែលអ្នកពេញចិត្ត នេះបូកនឹង៧៦ រួចឃើញលទ្ធផលហើយយកលេខពីរខ្ទង់នៃលទ្ធផលនេះបូកនឹងលេខមួយខ្ទង់ខាងមុខ រួចបានលទ្ធផលមួយទៀត។ បន្ទាប់មកទៀតយកលេខ ដែលអ្នកពេញចិត្តដកនឹងលទ្ធផលចុងក្រោយ នោះអ្នកនឹងបានចម្លើយដូចគ្នាទាំងអស់។

ឧទាហរណ៍ ៖ សុខពេញចិត្តលេខ ៧៧+៧៦=១៥៣ រួចយក ៥៣+១=៥៤ រួចយក ៧៧-៥៤=២៣

លំហាត់ ៖ ចូរអ្នកសាកល្បងលេខផ្សេងទៀតដោយធ្វើរបៀបដូចគ្នា តើអ្នកនឹងបានលទ្ធផលអ្វីកើតឡើង? ហើយនូវពេលអ្នកបង្រៀនសិស្សចូរឱ្យសិស្សរបស់អ្នកសាកល្បងធ្វើបែបនេះ នោះគេនឹងសរសើរអ្នកជាមិនខាន។

ខ. របៀបនៃការបង្រៀនសិស្សទាយពីអាយុ និងចំនួនបងប្អូន

ខ១.ទាយតែអាយុ

- បើអាយុច្រើនជាង៩ឆ្នាំ គឺ

(ឱ្យសិស្សយកអាយុពិតប្រាកដរបស់គេគុណនឹង១០)=លទ្ធផល-៧២=លទ្ធផល

ឧទាហរណ៍ សុខអាយុ ២៧ x១០=២៧០-៧២=១៩៨ រួចឱ្យសិស្សយក ១៩+៨=២៧ ជាអាយុរបស់សុខ ។

- បើអាយុតិចជាង៩ឆ្នាំ គឺ

(ឱ្យសិស្សយកអាយុពិតប្រាកដរបស់គេគុណនឹង១០)=លទ្ធផល-២៧=លទ្ធផល

ឧទាហរណ៍ សៅអាយុ ៧ x១០=៧០-២៧=៤៣ រួចឱ្យសិស្សយក ៤+៣= ៧ជាអាយុរបស់សៅ ។

ខ២.បង្រៀនសិស្សឱ្យទាយទាំងអាយុ និងចំនួនបងប្អូន

((((((ឱ្យសិស្សយកអាយុពិតប្រាកដរបស់គេx២))+១០) x៥០)+ចំនួនបងប្អូនបង្កើតដោយមិនគិតខ្លួនឯង)-៥០០)=លទ្ធផល

ឧទាហរណ៍ សុខអាយុ ២៧x២=៥៤+១០=៦៤x៥០=៣២០៣-៥០០=២៧០៣

នោះគេថាសុខមានអាយុ២៧ឆ្នាំ និងមានបងប្អូន៣នាក់ ។

លំហាត់ ចូរសាកល្បងខ្លួនឯង កូនយើង មិត្តភក្តិ បងប្អូន ប្តីឬប្រពន្ធ ។

គ. ការទាយពីរាសីប្រចាំ និងខ្សែជីវិតរបស់គូប្តីប្រពន្ធ

គ១.កាទាយពីរាសីប្រចាំឆ្នាំ

ការទាយតាមក្បួននេះ គឺយើងនឹងដឹងពីរាសីប្រចាំឆ្នាំរបស់ប្តីប្រពន្ធ ក្នុងឆ្នាំណាអន់ មធ្យម និងល្អហើយយើងក៏អាចដឹងថាក្នុងឆ្នាំណាអាចរៀបការទៅបានល្អ និងមិនល្អផងដែរ។

ដំបូងយើងយកអាយុប្តី និងប្រពន្ធបូកចូលគ្នា រួចគុណនឹង៣ បន្ទាប់មកចែកនឹង៩ នោះយើងនឹងទទួលបានសំណល់ ០ ឬ៣ ឬ៦។

បើសល់សំណល់ ០ គឺអន់បំផុត។ បើគូស្រករណាចង់រៀបការក្នុងឆ្នាំនេះ នោះជីវិតជួបតែលំបាក រកស៊ីមិនកាក់កប គ្រួសារជួបតែការទាស់ទែងគ្នា និងអាចដល់លែងលះគ្នាក៏ថាបាន។ ហើយចំពោះអ្នកដែលរៀបការហើយនោះ ជួបតែខាត ការងារជួបតែបរាជ័យ និងឈ្លោះទាស់ទែងគ្នាមិនចេះឈប់ឈរឡើយ។

បើសល់សំណល់៣ គឺ មធ្យម ហើយសំណល់៦ គឺល្អណាស់ ។

លំហាត់៖ ចូរសាកល្បងកូនយើង បងប្អូនយើង ។

គ២.ការទស្សន៍ទាយពីខ្សែជីវិត

ក្នុងក្បួននេះ គឺទស្សន៍ទាយពីខ្សែជីវិតគូស្រករដែលរៀបការហើយ ហើយវាបង្ហាញពីដំណាក់កាលពេលរៀបការហើយពី ៣ ទៅ ៥ឆ្នាំដំបូង ដំណាក់កាលវ័យកណ្តាល និងដំណាក់កាលវ័យចាស់។ រកស៊ីមានបានសល់ទ្រព្យច្រើន ឬរកស៊ីមិនបាន ឬអាចឈ្លោះទាស់ទែងគ្នា និងរហូតដល់ព្រាត់ប្រាស់ក៏មានដែរ។ ក្បួននេះមហាសែនធុត!

វិធីសាស្ត្រគណនា

យើងយកឆ្នាំរបស់ប្តីដាក់ពីមុខរបស់ឆ្នាំប្រពន្ធ ហើយគុណនឹងលេខសំណាង៧ រួចយើញលទ្ធផលគុណនឹងលេខសំណាង៧ម្តងទៀតនោះនឹងបានលទ្ធផល ហើយយើងនឹងទាយលទ្ធផលនេះ។ តែឆ្នាំដែលយកមកគិតគឺ៖

ជូត=១ ឆ្លូវ=២ ខាល=៣ ថោះ=៤ រោង=៥ ម្សាញ់=៦

មមី= ៧ មមែ=៨ វក=៩ រកា=១០ ច=១១ កុរ=១២ ។

ឧទាហរណ៍ ប្តីឆ្នាំរកា និងប្រពន្ធឆ្នាំខាល នោះយើងបាន ១០៣ x ៧=៧២១ x ៧=៥០៤៧

លេខ០គឺអន់បំផុត គូជីវិតជួបតែការលំបាក រកស៊ីមិនបាន គឺអាចឈ្លោះទាស់ទែងគ្នា និងរហូតដល់ព្រាត់ប្រាស់គ្នាក៏មានដែរ។

ពីលេខ១ ដល់៤ គឺក្រោមមធ្យម រកស៊ីមិនបាន គ្រួសារជួបតែការលំបាក ជីវភាពក្រីក្រ និងមិនមានទ្រព្យច្រើនទេ។

លេខ៥ គឺមធ្យម ការរកស៊ី និងជីវភាពគ្រួសារសមរម្យ

លេខ៦ គឺបង្គួរ ការរកស៊ី និងជីវភាពគ្រួសារបង្គួរ

លេខ៧ គឺល្អបង្គួរ ការរកស៊ី និងជីវភាពគ្រួសារល្អបង្គួរ

លេខ៨ គឺល្អ ការរកស៊ី និងជីវភាពគ្រួសារល្អ

លេខ៩ គឺល្អណាស់ ការរកស៊ី និងជីវភាពគ្រួសារល្អណាស់។

ចំពោះការបកស្រាយឧទាហរណ៍ខាងលើ គឺ ពេលការបាន ៣ឆ្នាំ ទៅ៥ឆ្នាំដំបូង គ្រួសារមានការរកស៊ីនិងជីវភាពមធ្យម ប៉ុន្តែបន្ទាប់មកពីលេខ០ ដល់លេខ 5 ដំណាក់កាលនេះជីវិតប្តីប្រពន្ធជួបតែការលំបាក រកស៊ីមិនកាក់កប ជីវភាពធ្លាក់ខ្លួនក្រីក្រ ឈ្លោះគ្នា មានភាពរកាំរកូសច្រើន ជួនកាលអាចលែងលះគ្នាក៏មាន។

ចំពោះលេខ៤ ជាដំណាក់កាលអាយុពី ៣០ឆ្នាំក្រាស់ ទៅ ៤០ក្រាស់ ជីវភាពគ្រាន់បើជាងមុនបន្តិច តែក្រោមមធ្យម។ ប៉ុន្តែដល់លេខ៧ ជាដំណាក់កាល៤០ឆ្នាំក្រាស់ ឬ៥០ រហូតដល់ចាស់ ទើបមានជីវភាពធូរធារមានបានសល់ទ្រព្យច្រើនបង្គួរសំបូរសប្បាយមានកិតិយសថ្លៃថ្នូរ និងជីវភាពគ្រួសារជួបតែសុភមង្គលល្អបង្គួរ។

លំហាត់៖ ចូរសាកល្បងកូនយើង ខ្លួនយើង បងប្អូនយើង។

ឃ. របៀបនៃការបង្រៀនសិស្សទាយពីរាសីមនុស្សតាមបែបណាប៉ូឡេអុង

សម្ភារៈ

ថ្ងៃកំណើត អាទិត្យ=១ ច័ន្ទ=២ អង្គារ=៣ ពុធ=៤ ព្រហស្បត្តិ៍=៥ សុក្រ=៦ សៅរ៍=៧

ខែកំណើត មិគ្គសិរ=១ បុស្ស=២ មាឃ=៣ ផល្គុន=៤ ចែត្រ=៥ ពិសាឃ=៦ ជេស្ឋ=៧ អាសាឍ=៨ ស្រាពណ៍=៩ ភទ្របទ=១០ អស្សុជ=១១ កត្តិក=១២

ឆ្នាំកំណើត ជូត=១ ឆ្លូវ=២ ខាល=៣ ថោះ=៤ រោង=៥ ម្សាញ់=៦ មមី=៧ មមែ=៨ វក=៩ រកា=១០ ច=១១ កុរ=១២ ។

ឧទាហរណ៍ និស្សិត ឡាយ សៀត កើតថ្ងៃពុធ ខែអាសាឍ ឆ្នាំរកា

ថ្ងៃ	៤	៥	៦	៧	៣	២	១					
ខែ	៨	៩	១០	១១	១២	១	២	៣	៤	៥	៦	៧
ឆ្នាំ	១០	១១	១២	១	២	៣	៤	៥	៦	៧	៨	៩
	១០	១	៤	៧	៣	៦	៩	៨	១០	០	២	៤

កុមារភាព២២ យុវវ័យ២៦ មជ្ឈិមវ័យ១៦

សរុប= ២២+២៦+១៦=៦៤

ចំណាំ ផលបូកលេខគិតតាមម៉ោងនាឡិកាសកល ហើយរាល់ផលបូកបានលទ្ធផល ៥២ ៦៤ ៧៦

- បើផលបូកបាន ៥២ ជាប្រភេទមនុស្សដែលមានចរិយាសម្បត្តិល្អ ឬកពាសមរម្យស្លូតបូតថ្លៃថ្នូរ។ ប៉ុន្តែពុំសូវមានទ្រព្យសម្បត្តិស្តុកស្តម្ភ គឺមានគ្រាន់តែសម្រាប់តែរស់ប៉ុណ្ណោះ។ ឯបញ្ហាស្នេហាមានការរកាំរកូសច្រើន ហើយលោកអ្នកដែលស្ថិតក្នុងប្រភេទ៥២នេះ គួរតែខំកាត់ចិត្តមានះចោល ហើយសេចក្តីព្យាយាមត្រូវតែរក្សាឱ្យបានខ្ជាប់ខ្ជួនទើបប្រពៃ។

- បើផលបូកបាន៦៤ជាមនុស្សដែលមានចិត្តទូលាយ មិនចេះរើសអើងចំពោះមិត្តស្និទ្ធស្នាល គួរជាទីគាប់ចិត្តនៃថ្នាក់ដឹកនាំរបស់ខ្លួន មានការនិយាយស្តីពិរោះពិសារ គួររាប់រកមិត្ត។ ទ្រព្យល្អបង្គួរ ឯបញ្ហាស្នេហាវិញប្រកបដោយសេចក្តីសុខណាស់ ។

- បើផលបូកបាន៧៦ ជាប្រភេទមនុស្សកំរិតខ្ពស់ បើធៀបនឹងប្រភេទ៥២ និង៦៤ ហើយមានលក្ខណៈសម្បត្តិល្អ ទ្រព្យល្អ ចរិយាល្អ និងវិជ្ជាល្អ។ ឯបញ្ហាស្នេហាវិញ បើមិនយល់ចិត្តគ្នាទេ នោះរមែងជួបតែសេចក្តីព្រាត់ប្រាស់ បែកបាក់ដោយអន្លើ។ យកល្អលោកអ្នកគួរសន្សំ និងសាងនូវអំពើល្អ ឱ្យបានច្រើន ទើបមានសេចក្តីសុខ សុភមង្គលកើតមានដល់រង្វង់គ្រួសាររបស់លោកអ្នក។

លំហាត់ ចូរសាកល្បងកូនយើង បងប្អូនយើង មិត្តភក្តិ ប្តីឬប្រពន្ធ ។

២.ការអនុវត្តន៍លើទ្រឹស្តីក្នុងការបង្រៀន

ឧទាហរណ៍៖ ចូររកតម្លៃ x និង y ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $(x/4)+(y/5)=19/20$ ដែល x និង y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ចម្លើយ

ប្រសិនបើអ្នកដោះស្រាយលំហាត់នេះតាមធម្មតា នោះអ្នកប្រាកដជាជួបបញ្ហាដូចជា

ចំពោះ $x=1$ យើងបាន $y=7/2$ មិនមែនជាចម្លើយ

ចំពោះ $x=2$ យើងបាន $y=\ldots$ មិនមែនជាចម្លើយ

ដូច្នេះ យើងប្រើវិធីទស្សន៍ទាយវៃឆ្លាត របស់យើង ដូចខាងក្រោម៖

$(4x+5y)/20=19/20$ នាំឱ្យ $x=(19-4y)/5\ldots$ (ii)

យើងឃើញថា សមីការ (i) និង (ii) សមមូលគ្នា នោះយើងធ្វើការទស្សន៍ទាយ (ii)

យើងឃើញថា តម្លៃ $y=1,2,3,4$ តម្លៃ y មិនអាចលើសពី 4 បានទេ

ព្រោះតម្លៃ x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

ក្រោយពីជំនួស យើងបានតម្លៃ $(x,y)=(3,1)$

លំហាត់ប្រតិបត្តិ៖

១. ផលបូកប្រាំត្រួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានស្មើ ៣០ និងផលបូកការេតួនៃស្វ៊ីតនេះស្មើ ២២០ ។ ចូររកតម្លៃតួដែលធំជាងគេ ។

២. ចូររកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y,z) ទាំងអស់ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌឱ្យសមីការ $3x+8y-z=27$ និង $6x-3y+z=33$ ។

៣. ចូររកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y,z) ទាំងអស់ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌឱ្យសមីការ $35x+21y+60z=665$ ។

៤. តាង a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ រកគ្រប់គូចំលើយនៃ (a,b) ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $(2/a)+(3/b)=1$ ។

៥. តាង x និង y ជាចំនួនគត់ ។ រកគ្រប់គូចម្លើយនៃ (x,y) ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^2+2y^2-2xy-4x+6y+1=0$ ។

៦. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមចំពោះ w,x,y,z ដែល w,x,y,z គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

$$\begin{cases} w+x+y+z=10 \\ w^2+2x^2+2y^2+3z^2=35 \\ w^3-x^3+y-z=28 \\ wxyz=24 \end{cases}$$

១.៦.២.ការដោះស្រាយលំហាត់ស្រដៀងគ្នា ប៉ុន្តែខាយខាង

លក្ខណៈស្រដៀងគ្នា ឬតាមគំរូ គឺជារបៀបគិតមួយដែលផ្តោតទៅលើភាពស្រដៀងគ្នា។ ជាឧទាហរណ៍ ការផ្លាស់ប្តូរលំហាត់ដែលគេឱ្យទៅជាលំហាត់ថ្មីមួយដែលអាចងាយស្រួលដោះស្រាយជាង ហើយជារឿយៗ បានជួយឱ្យយើងចំណេញនៅការយល់ដឹងស៊ីជម្រៅដែលចាំបាច់សម្រាប់ដោះស្រាយលំហាត់ដើម ឬក៏ជួនកាលអាចប៉ាន់ស្មានចម្លើយបាន។

ឧទាហរណ៍៖ គេដឹងថាផលបូករបស់តួចែក 660 ស្មើ 1170។

តើផលបូកចម្រាស់នៃតួចែកនោះស្មើប៉ុន្មាន?

ដំណោះស្រាយ

បើគេដឹងថាផលបូកតួចែកនៃ 360 ស្មើ1170 តើផលបូកចម្រាស់នៃតួចែកនេះស្មើប៉ុន្មាន?

គិតលំហាត់ស្រដៀង

តួចែកនៃ12 គឺ$1,2,3,4,6,12$ នាំឱ្យ$1+2+3+4+6+12=28$

ដូចនេះ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{(1+2+3+4+6+12)}{12}=\frac{28}{12}=\frac{7}{3}$

ដូចនេះ$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{360}=\frac{(1+2+3+4+...+360)}{360}=\frac{1170}{360}=\frac{13}{4}$

លំហាត់ប្រតិបត្តិ៖ ចូរសាកល្បងដោះស្រាយលំហាត់ខាងក្រោម៖

១. គេមានស្វ៊ែSមួយនៅក្នុងR^3។ ហើយគេដឹងថាកូអរដោនេនៃផ្ចិតរបស់វាជាចំនួនវិជ្ជមាន ហើយគេដឹងទៀតថា វាប៉ះទៅនឹងប្លង់ xy, yz និង zx ព្រមទាំងប្លង់$(\alpha): x+2y-2z-3=0$ ។ ចូររកសមីការស្វ៊ែរនេះ ។

២. គេឱ្យចំណុច $P(x,y,z)$ មួយផ្លាស់ទីលើស្វ៊ែ $S:\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2$ ។ ចូររករ៉ង់នៃតម្លៃ $x+2y-2z$ ។

៣. ចូរបង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលគូសចេញពីកំពូលទាំងបួនរបស់តេត្រាអ៊ែតកាត់គ្នាត្រង់មួយចំណុច ។

៤. គេឱ្យបន្ទាត់$(L): \frac{x}{2}=y=-\frac{z}{2}$ ។ ចំណុច $A(6,6,0), B(4,-1,-1)$ ។ នៅពេលដែលចំណុចP ផ្លាស់ទីនៅលើបន្ទាត់ (L) ចូររកកូអរដោនេរបស់ P ដែលធ្វើឱ្យតម្លៃ $AP+PB$ អប្បបរមា។

៥. គេឱ្យចំណុច$A(2,\ 2,\ 0),\ B(0,\ 0,\ 2)$ នៅក្នុងលំហ ។ តាង C ជាសំណុំចំណុចនៃចំណុច P ដើម្បីឱ្យត្រីកោណ PAB ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។ ចូររកសមីការចំណោលកែងនៃ Cទៅលើប្លង់ xy ។

៧. ចំពោះ $a_1\ge a_2\ge a_3$ និង$b_1\ge b_2\ge b_3$។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)\le 3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$

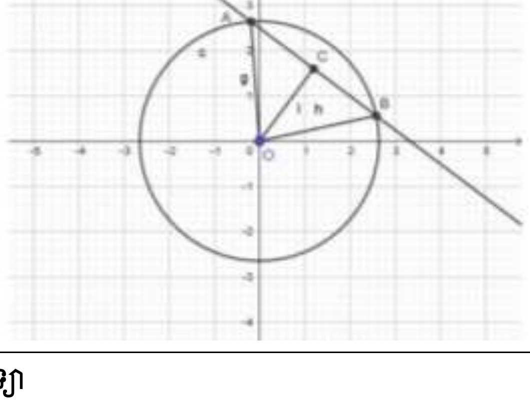
១.៦.៣.ការគូររូបតាង

ក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់គណិតវិទ្យា អ្នកប្រហែលជាមានបទពិសោធន៍ថា ការគូររូបតាងពិតជាអាចជួយអ្នក ដើម្បីរក ដំណោះស្រាយបាន ។ យុទ្ធវិធីគូរូបតាងមានសារៈប្រយោជន៍ដើម្បីពិពណ៌នាលំហាត់ជារូបភាពតាមរបៀបគូររូបតាងដ្យាក្រាម ឬក្រាប ។

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យសមីការរង្វង់$x^2+y^2=7$កាត់បន្ទាត់$3x+4y=10$ត្រង់ Aនិង B ។ចូររកប្រវែង AB ។

ដំណោះស្រាយ

ឧបមាថារង្វង់ $x^2+y^2=7$ កាត់បន្ទាត់ $3x+4y=10$ត្រង់ A និង B ។ ចូររកប្រវែង AB។



តាមរូបប្រវែង $AB = 2BC$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រក្នុងត្រីកោណកែង OBC

យើងបាន $BC^2 = OB^2 - OC^2$

តែ OC ជាចម្ងាយពីចំណុច $O(0,0)$ ទៅបន្ទាត់ $3x + 4y = 10$

ដូចនេះ $OC = \dfrac{|3(0) + 4(0) - 10|}{5} = 2$

នាំឱ្យ $BC^2 = 7 - 4 = 3$ នោះ $BC = \sqrt{3}$

ដូចនេះប្រវែង $AB = 2\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ប្រតិបត្តិ៖ ចូរសាកល្បងដោះស្រាយលំហាត់ខាងក្រោម៖

១. មានសូលុយស្យុងអំបិលពីរប្រភេទ A និង B នៅក្នុងទឹក ។ កំហាប់នៃសូលុយស្យុង A ស្មើ 8% និងកំហាប់នៃសូលុយស្យុង B ស្មើ 3% ។ ប្រសិនបើយើងចង់បានសូលុយស្យុងអំបិល 5% ចំនួន 300 ក្រាម។ តើយើងត្រូវការសូលុយស្យុងនីមួយៗប៉ុន្មានក្រាម ?

២. មានសូលុយស្យុងអំបិលពីរប្រភេទ A និង B នៅក្នុងទឹក ហើយកំហាប់នៃសូលុយស្យុង B ស្មើ 5% ។ ប្រសិនបើយើងចង់បានសូលុយស្យុងអំបិល 8% ចំនួន 800 ក្រាម ដោយប្រើសូលុយស្យុង A ចំនួន 400 ក្រាម។ តើកំហាប់សូលុយស្យុង A ត្រូវស្មើប៉ុន្មានភាគរយ ?

៣. មានសូលុយស្យុងអំបិល A មួយនៅក្នុងទឹក ដែលកំហាប់របស់វាស្មើ 12% ។ ប្រសិនបើយើងចង់បង្កើតសូលុយស្យុងអំបិល 3% ចំនួន 600 ក្រាម ដោយបន្ថែមទឹកចូលក្នុងសូលុយស្យុង A ។ តើយើងត្រូវការសូលុយស្យុង A និងទឹកប៉ុន្មានក្រាម ?

៤. គេឱ្យខ្សែមួយមានប្រវែងថេរនៅក្នុងកន្លះរង្វង់មួយ។ ចំណុចកណ្តាលរបស់ខ្សែ និងចំណោលនៃចុងរបស់វាទៅលើបាតបង្កើតបានកំពូលត្រីកោណមួយ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ត្រីកោណនេះជាត្រីកោណសមបាត ហើយមិនផ្លាស់ប្តូរទ្រង់របស់វាទេ។

៥. គេឱ្យសមីការរង្វង់ $x^2 + y^2 = 7$ កាត់បន្ទាត់ $3x + 4y = 10$ ត្រង់ P និង Q ។ ចូររកប្រវែង PQ ។

៦. ឧបមាថាចំណុច P ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល $y^2 = ax$ ហើយមិននៅលើគល់ $O(0,0)$ រួចគូសបន្ទាត់កែងត្រង់ P ។ តាង Q ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់កែង និងអ័ក្ស x ហើយ R ជាចំណុចប្រសព្វរវាងចំណោលកែងត្រង់ P និងអ័ក្ស x ។ ស្រាយថាប្រវែង QR មានតម្លៃថេរមិនទាក់ទងនឹងទីតាំងរបស់ P ទេ ។

៧. រកតម្លៃ $\lim\limits_{x \to 2} \left[-x^2 + 4x\right]$ ដែល $[a]$ បញ្ជាក់ពីចំនួនគត់អតិបរមាដែលមិនលើសតម្លៃ a មានន័យថា $[a] =$ អតិបរមា ។ $\{k \in \mathbb{Z},\ k \le a\}$

៨. គេឱ្យសមីការ $x + y + 1 = 0$ កាត់រង្វង់ $x^2 + y^2 = 4$ ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា។ យើងគូសបន្ទាត់ពីរប៉ះទៅនឹងរង្វង់ $x^2 + y^2 = 4$ ត្រង់ចំនុចប្រសព្វទាំងពីរនោះ។ តាង α ជាមុំដែលបង្កើតឡើងដោយបន្ទាត់ប៉ះ ទាំងពីរនោះ ហើយគេដឹងថា $0 < \alpha < 90°$ ។ ចូររកតម្លៃនៃ $tan\alpha$ ។

៩. តាង C ជារង្វង់ដែលមានផ្ចិត $(0,1)$ និងមានកាំស្មើ 1 ហើយ C ជារង្វង់ដែលមានផ្ចិត $(4,0)$ និងមានកាំស្មើ 2 ។ ឧបមា $P(x,y)$ នៅក្រៅរង្វង់ទាំងពីរ ហើយមុំបង្កើតឡើងដោយការគូសបន្ទាត់ប៉ះពីរ ពីចំនុច P ទៅ C ស្មើមុំដែលបង្កើតដោយការគូសបន្ទាត់ប៉ះពីចំនុច P ទៅ C ។ រកសមីការនៃសំណុំចំណុចរបស់ P ។

១០. ស្រាយបញ្ជាក់ថា π ជាផលធៀបនៃបរិមាត្ររង្វង់ទៅនឹងអង្កត់ផ្ចិតរបស់វា គឺធំជាង 3.05។ អាចប្រើតម្លៃប្រហែល $\sqrt{2}=1.4142$ និង $\sqrt{3}=1.7320$ ប្រសិនបើចាំបាច់។

១១. គេឱ្យពីរចំណុច $A_m(m,0),\ B_n(0,n)$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ តាង $N(m,n)$ ជាចំនួនចំណុចណ្ដាញនៅក្នុងត្រីកោណ OA_mB_n រួមទាំងបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណផង ។

(ចំណុចនៅលើប្លង់ xy ដែលកូអរដោនេទាំងពីរជាចំនួនគត់ ត្រូវបានហៅថាជាចំណុចបណ្ដាញ)

ចូររកចំនួនចំណុចបណ្ដាញនៃ $N(6,4)$ និង $N(6,5)$ ។

១.៦.៤.ការកំណត់ហេតុផលឡូស៊ិក

ការកំណត់បែបហេតុផលឡូស៊ិក មិនគ្រាន់តែជាបេះដូងគណិតវិទ្យាប៉ុណ្ណោះទេ ថែមទាំងជួយធ្វើឱ្យជីវិតរបស់អ្នកបានល្អប្រសើរជាងមុនទៀតផង ។

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យចំនួនវិជ្ជមាន x,y ដែលបំពេញល.ខ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ ។

ចូររកតម្លៃអប្បរមានៃ $x+y$ ។

ចម្លើយ

ដោយ x,y វិជ្ជមាននោះយើងបាន $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

អង្គទាំងពីរនៃវិសមីការស្មើគ្នាពេលដែល $x=y=2$

នោះយើងបាន $2\sqrt{xy}=4$ ។

ដូច្នេះ តម្លៃអប្បរមានៃ $x+y$ គឺ 4 ។

តើចម្លើយនេះត្រឹមត្រូវឬទេ? បើមិនដូច្នោះទេ ចូរសរសេរហេតុផល និងកែកំហុសនោះ ។

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យចំនួនពិត x,y ដែលបំពេញល.ខ $x^2+xy+y^2=1$។

ចូររកតម្លៃអប្បរមានៃ $(x^2-4)(y^2-4)$ ។

ចម្លើយ

ដោយ x,y ជាចំនួនពិត នោះយើងតាង $x+y=u,\ xy=v$

យើងបាន $u^2-v=1\ \ldots.(1)$

ដោយបំលែង $(x^2-4)(y^2-4)=(v+2)^2+8$

នាំឱ្យតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 8 ពេលដែល $v=-2$ ។

តើចម្លើយរបស់សិស្សត្រឹមត្រូវឬទេ? បើមិនត្រឹមត្រូវ ចូររកហេតុផល និងកែនូវកំហុសនេះ ។

ឧទាហរណ៍៖ គេមានលេខបួនខ្ទង់ $x56y$ ដែលចែកដាច់នឹង 9 ។ តើតម្លៃ $x+y$ ស្មើប៉ុន្មាន?

ដំណោះស្រាយ

គេឱ្យលេខបួនខ្ទង់ $x56y$ ដែល x ជាខ្ទង់ដំបូង និង y ជាខ្ទង់ចុងក្រោយ

ហើយលេខបួនខ្ទង់នេះចែកដាច់នឹង 9 ។ ចូររកតម្លៃ $x+y$ ។

ដោយ $x56y$ ចែកដាច់នឹង 9 នោះផលបូក

$x+5+6+y=9k$ ដែល $k=1,2,3,\ldots.$

ដូចនេះ $x+y=9k-11$

ចំពោះ $k=1$ នាំឱ្យ $x+y=-2$

$k=2$ នាំឱ្យ $x+y=7$

$k=3$ នាំឱ្យ $x+y=16$

k=4 នាំឱ្យ $x+y=25$

ដោយ $1\le x\le 9$ និង $0\le y\le 9$ នោះយើងបាន $1\le x+y\le 8$

ដូច្នេះ $x+y=7$ ឬ 16 ។

លំហាត់ប្រតិបត្តិ៖

១. លេខមួយក្នុងចំណោមលេខខាងក្រោមស្មើនឹង 13!។ តើលេខមួយណា ?

(a) 6227020800 (b) 6227028000 (c) 6227280000

២. ចូររកគូទាំងអស់នៃចំនួនបឋមដែលមានផលបូកស្មើនឹង 999 ។

៣. បើចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មិនមែនជាពហុគុណនៃ 5 នោះ n^4-1 ចែកដាច់នឹង 5 ។

៤. ចូររកគូចំនួនគត់វិជ្ជមាន (m,n) ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $m^4-n^4=2145$ ។

(ប្រើ $6^4=1296, 7^4=2401, 8^4=4096, 9^4=6561$) ។

៥. តើខ្ទង់លេខចុងក្រោយនៃ 3^{4798} គឺជាលេខប៉ុន្មាន ?

៦. ឧបមាថាអ្នកជាគ្រូ ហើយសិស្សរបស់អ្នកបានឆ្លើយលំហាត់ដូចខាងក្រោមៈ

៧. គេឱ្យចំនួនវិជ្ជមាន x,y ដែលបំពេញល.ខ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ ។ ចូររកតម្លៃអប្បបរមានៃ $x+2y$ ។

៨. តាង (L) ជាបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $(p,-p^2+1)$ លើខ្សែកោង $y=-x^2+1$ ដែល $(p>0)$ ។ ពេលដែល (L) កាត់ប៉ារ៉ាបូល $y=(x-a)^2$ ត្រង់ពីរចំណុចមិនអាស្រ័យនឹង p ។ ចូររកលក្ខខណ្ឌរបស់ a ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងលើនេះ ។

៩. ឧបមាថា $a>0, b>0, c>0$ ជាមុំក្នុងត្រីកោណ ។

ចូររកតម្លៃអតិបរមានៃផលគុណ $sina\cdot sinb\cdot sinc$ ។

១០. គេឱ្យ $f(x)=ax+b$ និង $1\le f(1)\le 2$ និង $2\le f(2)\le 3$ ។ ចូររកវ៉ង់នៃតម្លៃ $f(3)$ ។

១១. អ្នកមានគុជ 8 ដូចៗគ្នា ប៉ុន្តែមានមួយដែលមិនសុទ្ធ និងស្រាលជាងគេបន្តិច។ អ្នកមានជញ្ជីងតែមួយដើម្បីថ្លឹងវា។ តើអ្នកអាចរកឃើញគុជមិនសុទ្ធបានទេ ដោយថ្លឹងតែពីរដងគត់?

១.៦.៥.សម្រាយបញ្ជាក់ដោយមិនផ្ទាល់

ពេលដែលយើងជួបប្រទះចំពោះមុខនូវបញ្ហាលំហាត់ជាច្រើន ដែលមិនអាចដោះស្រាយបានដោយងាយស្រួល តាមរយៈការស្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់ វាជាការមានតម្លៃណាស់ ចំពោះការពិចារណាថាតើវាអាចស្រាយបានតាមវិធីដោយមិនផ្ទាល់បាន ដែរឬទេ?

ខាងក្រោមនេះជាវិធីដែលត្រូវបានគេប្រើញឹកញាប់៖

១.សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទុយពីការពិត

គឺយើងឧបមាសំណើដែលយើងចង់បាននោះទៅជាសំណើផ្ទុយទៅវិញ ហើយយើងស្រាយវាឱ្យឃើញថាមិនអាចទៅរួច ហើយយើងសន្និដ្ឋានសំណើដើម (សំណើ មិន P មិនពិត នោះសំណើ P ពិត)។

២.សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

ប្រើលក្ខណៈសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្មឱ្យពិតដូចសំណើដើមដែរ មានន័យថាយើងត្រូវស្រាយលើសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្មនោះ (បើ "មិន Q នាំឱ្យមិន P ពិត " នោះគេអាចសន្និដ្ឋានថា "សំណើ P នាំឱ្យ Q " ពិត)។

ឧទាហរណ៍៖ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ n^2 ជាចំនួនគូនោះ n ក៏ជាចំនួនគូដែរ ដែល n ជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា បើ n^2 ជាចំនួនគូ នោះ n ក៏ជាចំនួនគូដែរ

ឧបមាថា n មិនមែនជាចំនួនគូ ពេលដែល n^2 ជាចំនួនគូ

នោះ $n=2k+1$ ដែល k ជាចំនួនគត់

តាមលក្ខខណ្ឌ $n^2=(2k+1)^2$ គឺជាចំនួនគូ

តែ $n^2=2\left(2k^2+2k\right)+1$ ជាចំនួនសេស ដែលផ្ទុយពីការពិត ។

ដូច្នេះ បើ n^2 ជាចំនួនគូ នោះ n ក៏ជាចំនួនគូដែរ។

លំហាត់ប្រតិបត្តិ៖

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

២. ដោយប្រើ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា បើមានចំនួនពិតសនិទាន a និង b មិនសូន្យ នោះ $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

៣. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើផលគុណ mn ជាចំនួនគូ នោះ យ៉ាងហោចណាស់មាន m និង n ជាចំនួនគូ ។

៤. បង្ហាញថា a, b, c ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^2+b^2=c^2$ យ៉ាងហោចណាស់ មាន a និង b ជាចំនួនគូ និង a និង b ជាចំនួនសេស ។

៥. ឧបមាថាអនុគមន៍ $f(x)$ បំពេញល.ខ $f(4)-3f(3)+3f(2)-f(1)=6$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាមាន $|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ និង $|f(4)|$ ធំជាងឬស្មើ $\frac{3}{4}$ ។

៦. តាង $a_1,a_2,a_3,..,a_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង $n\geq 2$។

ប្រសិនបើយើងតាង $A=a_1+a_2+a_3+...+a_n$ និង $B=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ ...+\frac{1}{a_n}$) ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាយ៉ាងហោចណាស់ មាន A និង B ធំជាងឬស្មើ n ។

៧. ប្រសិនបើអនុគម $f(x)=3x^2+2ax+b$ បំពេញល.ខ $\int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|dx<2$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ។

១.៦.៦.ការគិតបែបអនុមានរួម

១.ការរកលំនាំគំរូ

លំហាត់

១. ចូររកខ្ទង់ឯកតា ឬខ្ទង់រាយ នៃ 8^{19} ។

២. ចូររកខ្ទង់ឯកតា ឬខ្ទង់រាយ នៃ 123^{99} ។

៣. ចូររកខ្ទង់ឯកតា ឬខ្ទង់រាយ នៃផលបូក $13^{25}+4^{81}+5^{411}$ ។

៤. តើលេខប៉ុន្មានខ្លះគឺជាពហុគុណនៃ 10 ក្នុងចំណោម
$1^4-1, 2^4-1, 3^4-1, 4^4-1, ..., 98^4-1, 99^4-1, 100^4-1$?

៥. ចូរសន្និដ្ឋានផលបូកនៅក្នុងជួរដេកទី ២៥ នៃការតំរៀបខាងក្រោម?

ជួរដេក						
1st	1					
2nd	3	5				
3rd	7	9	11			
4th	13	15	17	19		
5th	21	23	25	27	29	
6th	31	33	35	37	39	41

២ អនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ត្រូវអនុវត្តតាមជំហានដូចខាងក្រោម៖

(១)សាកល្បង

(២)សន្និដ្ឋាន

(៣)ស្រាយបញ្ជាក់

ឧទាហរណ៍៖ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

សម្រាយបញ្ជាក់

ស្រាយថា $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(១) សាកល្បង ប $n=1$ នោះ $1=\frac{1(1+1)}{2}$ ពិត

(២) សន្និដ្ឋានថា ពិតចំពោះ $n=k$ នោះ $1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$

(៣) ត្រូវស្រាយថា វាពិតផងដែរចំពោះ $n=k+1$

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ដូចនេះ $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ។

លំហាត់ប្រតិបត្តិ៖

១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖ $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

២. ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាង ឬស្មើ 1 ។ ចូររកចំនួនបឋមដែលចែកចំនួន $a_n=19^n+(-1)^{n-1}\cdot 2^{4n-3}$ ដាច់ដោយគ្មានសំណល់។

៣. ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាង ឬស្មើ1 ។ ចូររកចំនួនបឋមដែលចែកចំនួន $a_n = 2^{n+1} + 3^{2n-1}$ ជាច់ដោយគ្មានសំណល់។

៤. ឧបមាថាអ្នកមិនស្គាល់ឯកលក្ខណៈភាព $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ។

ចូររកតម្លៃផលបូក $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ ។

១.៦.៧.ការធ្វើការថយក្រោយ

ធ្វើការងារបញ្ច្រាសមានន័យថា ធ្វើការប៉ាន់ស្មានសេចក្ដីសន្និដ្ឋាន រួចទាញរកអនុមានចេញពីការសន្និដ្ឋាននេះ រហូតដល់យើងឈានទៅដល់អ្វីមួយដែលស្គាល់ ឬអ្វីមួយដែលដែលអាចស្រាយបញ្ជាក់បានដោយស្រួល។ បន្ទាប់ពីយើងឈានទៅដល់អ្វីដែលគេឱ្យ ឬអ្វីដែលស្គាល់ ហើយយើងបញ្ច្រាសជំហានទាំងឡាយនៅក្នុងសម្រាយបញ្ជាក់នោះ និងដំណើរការទៅរកសេចក្ដីសន្និដ្ឋាននោះ។

ឧទាហរណ៍៖ តើតម្លៃមួយណាធំជាងរវាង 1 និង $\frac{2}{3}log_2 3$?

ដំណោះស្រាយ

តើតម្លៃមួយណាធំជាងរវាង 1 និង $\frac{2}{3}log_2 3$?

យើងមាន $2^3 < 3^2$ សមមូល $log_2 2^3 < log_2 \ 3^2$

សមមូល $3 < 2log_2 3$

សមមូល $1 < \frac{2}{3}log_2 3$

ការងារបញ្ច្រាស

$1 < \frac{2}{3}log_2 3$

សមមូល $3 < 2log_2 3$

សមមូល $log_2 2^3 < log_2 \ 3^2$

សមមូល $2^3 < 3^2$ ។

លំហាត់ប្រតិបត្តិ៖

១. បើ a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។

ចូរបង្ហាញថា $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 < 4(ab+bc+ca)$ ។

២. តាង $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$ ជាជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC ដែលមានមុំទាលមួយ និងតាង $AL,\ BM,\ CN$ ជាបន្ទាត់កែងដែលគូសចេញពីកំពូលនីមួយៗទៅបាត។ ប្រសិនបើ H ជាចំនុចប្រសព្វនៃកំពស់ទាំងបីនេះ។ ចូរស្រាយថា $AH = \frac{a}{tanA},\ BH = \frac{b}{tanB},\ CH = \frac{c}{tanc}$ ។

៣. តាង a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។

តាង S ជាក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណនេះ និង $a+b+c = 2t$ ។

ចូរបង្ហាញ $t^2 > 3S \ squar \ root \ of \ 3$ ។

៤. រង្វង់ពីរប៉ះគ្នាខាងក្រៅត្រង់ A និងបន្ទាត់ប៉ះខាងក្រៅរួមមួយប៉ះទៅនឹងរង្វង់ទាំងពីរត្រង់ B និង C ។ គេបន្លាយ BA ឱ្យកាត់រង្វង់ទីពីរត្រង់ D ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា CD គឺជាអង្កត់ផ្ចិត។

៥. ពិនិត្យសម្រាយបញ្ជាក់ខាងក្រោម៖

ឧបមាថាមុំ θ បំពេញល.ខ $\frac{1}{\tan\theta}+\tan 3\theta=0$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

ដោយ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

នាំឱ្យ $\frac{1}{\tan\theta}+\frac{\tan\theta+\tan 2\theta}{1-\tan\theta\tan 2\theta}=0$

សមមូល $\frac{1}{\tan\theta}(1-\tan\theta\tan 2\theta)+\tan\theta+\tan 2\theta=0$

សមមូល $\frac{1}{\tan\theta}-\tan 2\theta+\tan\theta+\tan 2\theta=0$

សមមូល $\frac{1}{\tan\theta}+\tan\theta=0$

សមមូល $1+\tan^2\theta=0 \Leftrightarrow \tan^2\theta=-1$ មិនពិត

នោះនាំឱ្យសមីការដើមមិនមានដំណោះស្រាយ ។

ប៉ុន្តែ $\theta=\frac{\pi}{4}$ បំពេញល.ខ $\frac{1}{\tan\theta}+\tan 3\theta=0$ ។ តើមានអ្វីខុសជាមួយនឹងសំរាយបញ្ជាក់នេះ ?

១.៦.៨.ការកែប្រែចំណោទ

ក្នុងការដោះស្រាយចំណោទមួយចំនួនវាជារឿយៗ គេអាចឱ្យយើងកែតំរូវផ្លាស់ប្តូរ ឬកែទំរង់ ចំណោទដើម្បីរកផ្លូវទៅរកចម្លើយ។

មានពីរករណី៖

ក) ការបង្ហាញសំណើសមមូលទៅនឹងអ្វីដែលអ្នកតម្រូវឱ្យស្រាយបញ្ជាក់

ខ) ការពិចារណាល.ខ គ្រប់គ្រាន់ចំពោះល.ខ ដែលគេឱ្យ ។

ជាតួយ៉ាង ក្នុងការផ្លាស់ប្តូរចំណោទ គេត្រូវនិយាយថា វាគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីបង្ហាញថា... និងផ្សេងទៀត ។

ឧទាហរណ៍៖ ចូរស្រាយថា ប្រសិនបើចំនួនពិត x,y,z និង a បំពេញឯកលក្ខណៈភាព $x+y+z=a$ និង $x^3+y^3+z^3=a^3$ នាំឱ្យយ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម x,y,z ស្មើទៅនឹង a ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ស្រាយថា ប្រសិនបើចំនួនពិត x,y,z និង a បំពេញលក្ខខណ្ឌឱ្យឯកលក្ខណៈភាព $x+y+z=a$ និង $x^3+y^3+z^3=a^3$ នាំឱ្យយ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម x,y,z ស្មើទៅនឹង a

យុទ្ធវិធីដោះស្រាយ

យើងអាចពិចារណាថា តើអ្វីគឺជាលក្ខខណ្ឌសមមូលជាមួយនឹងលក្ខខណ្ឌដែលថា យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុង ចំណោម x,y,z ស្មើ a ឬថាសំណួរបែបនេះអាចសរសេរជាកន្សោមគណិតវិទ្យាបានយ៉ាងដូចម្តេច ? ឬអាចសរសេរងាយជាងនេះ ដូចខាងក្រោម៖

x ស្មើនឹង a សមមូល $x-a=0$

យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម x និង y ស្មើនឹងa សមមូល $(x-a)(y-a)=0$

ដូច្នេះ អ្នកនឹងអាចរកឃើញទំនាក់ទំនងដូចខាងក្រោម៖

យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម x,y និង z ស្មើនឹងa

សមមូល $(x-a)(y-a)(z-a)=0$ មានន័យថា វាគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា

$x+y+z=a$ និង $x^3+y^3+z^3=a^3$ នាំឱ្យ $(x-a)(y-a)(z-a)=0$

តាង x,y,z និង a បំពេញលក្ខខណ្ឌឱ្យឯកលក្ខណៈភាព $x+y+z=a$ និង

$x^3+y^3+z^3=a^3$ នាំឱ្យ $(x-a)(y-a)(z-a)=0$ (i)

អង្គខាងឆ្វេងនៃ (i) អាចជា

$$\begin{aligned}(x-a)(y-a)(z-a)&=xyz-xya-xza+xa^2-yza+ya^2+za^2-a^3\\&=xyz-\left(xy+yz+zx\right)a+\left(x+y+z\right)a^2-a^3\\&=xyz-\left(xy+yz+zx\right)a+a.a^2-a^3\\&=xyz-(xy+yz+zx)a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3-3xyz&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\&=\left(x+y+z\right)\left\{\left(x+y+z\right)^2-3\left(xy+yz+zx\right)\right\}\\&=a\left(a^2-3\left(xy+yz+zx\right)\ \right)\\&=a^3-3a\left(xy+yz+zx\right)\end{aligned}$$

នាំឱ្យ $x^3+y^3+z^3=a^3-3a(xy+yz+xz)+3xyz$

សមមូល $a^3=a^3-3a(xy+yz+xz)+3xyz$ នាំឱ្យ $xyz=a\left(xy+yz+zx\right)$

ដូច្នេះ $\left(x-a\right)\left(y-a\right)\ \left(z-a\right)=a\left(xy+yz+zx\right)-a\left(xy+yz+zx\right)=0$

ដូច្នេះ យ៉ាងហោចណាស់ មានមួយក្នុងចំណោម x,y,z ស្មើ a ។

លំហាត់ប្រតិបត្តិ៖

១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា x,y,z និង a បំពេញឯកលក្ខណៈភាព $x+y+z=3a$ និង $xy+yz+zx=3a^2$ នាំឱ្យ $x=y=z=a$ ។

២. ពិនិត្យអនុគម $f\left(x\right)=x^2+ax+1$ ដែល a ជាចំនួនពិត ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្រសិនបើមានចំនួន ពិត b ដែល $f\left(b\right)<0,$ នោះ $f\left(\dfrac{1}{(a+b)}\right)>0$ ។

៣. ចូរកំនត់វ៉ង់នៃតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការដឺក្រេទីបី $x^3-3x^2-a=0$ មានឫសបីផ្សេងគ្នា ។

៤. កំណត់វ៉ង់នៃតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យតម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍ $f(x)=(1-acos^2\dfrac{x}{2})sinx$ ស្មើ 1 ។

៥. គេឱ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $4x^2-ax+2a=0$ ដែល a ជាចំនួនថេរ ។ កំនត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ សមីការ មានឫសយ៉ាងហោចណាស់មួយនៅចន្លោះ $-1<x<1$ ។

៦. កំណត់តម្លៃ P ដើម្បីឱ្យសមីការដឺក្រេទីបី $x^3-\left(p-3\right)x^2-3x+p-1$មានឫសបីជាចំនួនគត់។

៧. ឧបមាថា a, b, c, d ជាចំនួនពិត និង $|a|\le 2, |b|\le 2, |c|\le 2, |d|\le 2, a+b=1, c+d=1$ ។ រកវ៉េងនៃតម្លៃ $ac+bd$ ។

៨. លេខ 5 អាចបង្ហាញដោយផលបូកនៃបីចំនួនគត់ យកលំដាប់មកគិតជា 6 របៀប ដូចខាងក្រោម ៖ $5=1+1+3=1+3+1=3+1+1=1+2+2=2+1+2=2+2+1$។ តាង m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $m\le n$ ។ តើមានប៉ុន្មានរបៀបដែលយើងអាចសរសេរ n ជាផលបូកនៃចំនួនគត់ m ដោយយកលំដាប់មកគិត ?

៩. តាង $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់កើននៅលើ$[a,\ b]$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$ ។

១.៦.៩.ពិសេសកម្ម និងទូទៅកម្ម

ពិសេសកម្ម និងទូទៅកម្មដើរតួនាទីដ៏សំខាន់ក្នុងការសិក្សាគណិតវិទ្យាកម្រិតឧត្តមសិក្សា ។

ពិសេសកម្ម គឺត្រូវពិចារណាដែលតូចជាង ដោយផ្អែកលើលទ្ធផលនៅក្នុងក្រុមដែលធំជាង ។

ទូទៅកម្ម គឺត្រូវពិចារណាក្រុមដែលធំជាង ដោយផ្អែកលើលទ្ធផលនៅក្នុងក្រុមដែលតូចជាង ។ ប៉ុន្តែទូទៅកម្ម ជាធម្មតាតម្រូវឱ្យមានសម្រាយបញ្ជាក់ ។

ឧទាហរណ៍ ទូទៅកម្ម

ផលបូកមុំក្នុងត្រីកោណមួយ = 180°

ផលបូកមុំក្នុងនៃចតុកោណមួយ = 360°

នាំឱ្យទូទៅកម្មគឺ ផលបូកមុំក្នុងនៃពហុកោណដែលមាន n ជ្រុង$=(n-2)180^\circ$

$(cosx+isinx)^2 = cos2x+isin2x$

$(cosx+isinx)^3 = cos3x+isin3x$

នាំឱ្យទូទៅកម្មគឺ $(cosx+isinx)^n = cosnx+isinnx$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ នាំឱ្យទូទៅកម្មគឺ ……………………………

ឧទាហរណ៍ ពិសេសកម្ម

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ នាំឱ្យពិសេសកម្មគឺ $\cos\left(90^o+x\right)=\sin x$

$\{f(x).g(x)\}' = f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$នាំឱ្យពិសេសកម្ម គឺ $\left(kf(x)\right)'=kf'(x)$

លំហាត់ប្រតិបត្តិ៖

១. ចូររកតម្លៃ $\sum_{k=1}^{n} k2^k$ ។

២. ចូររកតម្លៃ $\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ។

៣. ចូរស្រាយបញ្ជាក់

$2^n = nCn+nCn-1+nCn-2+...+nC3+nC2+nC1+nC0$ ។

៤. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $a_1\ge a_2, b_1\ge b_2$ នាំឱ្យ $(a_1+a_2)(b_1+b,)\le 2(a_1b_1+a_2b_2)$ ។

៥. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $a_1 \geq a_2 \geq a_3, b_1 \geq b_2 \geq b_3$ នាំឱ្យ

$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3) \leq 3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$ ។

ចូរសរសេរពីវិធីទូទៅកម្មចំពោះលទ្ធផលលំហាត់ទី៤ និងទី៥ រួចបង្ហាញវាផង ។

៦. បង្ហាញថាចំពោះចំនួនពិត a_1,a_2,b_1,b_2 នោះ $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2)^2$ ។ រួចបង្ហាញផងដែរចំពោះ លក្ខខណ្ឌដែលធ្វើឱ្យវិសមភាពនេះកើតមានឡើង ។

៧. បង្ហាញថាចំពោះចំនួនពិត a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 នោះ

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$ ។ រួចបង្ហាញផងដែរចំពោះលក្ខខណ្ឌដែលធ្វើឱ្យវិសមភាពនេះកើតមានឡើង ។

៨. ចូរសរសេរពីវិធីទូទៅកម្មចំពោះលទ្ធផលលំហាត់ទី៦ និងទី៧ រួចបង្ហាញវាផង ។

៩. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ ខ. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ ។ តើសំនួរ (ខ) ជាទំរង់អ្វីនឹងសំនួរ (ក) ។

១០. ឧបមាថា $a>0,\ b>0,\ m>0,\ n>0,\ m+n=1$ ។ ចូរបង្ហាញវិសមភាពខាងក្រោមដោយប្រើបញ្ញត្តិនៃភាពប៉ោង ។

ក) $\sqrt{ma+nb} \geq m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$ ខ) $\frac{m}{a}+\frac{n}{b} \geq \frac{1}{ma+nb}$ ។

១.៦.១០.ការងាកទៅមើលនិយមន័យ

យុទ្ធវិធីការងាកទៅមើលនិយមន័យ ត្រូវផ្អែកលើការដែលថា គណិតវិទ្យាជាប្រព័ន្ធឡូស៊ិកមួយ ដែលទាញចេញពីស្វ័យសត្យ និងនិយមន័យផ្សេងៗ។ យុទ្ធវិធីនេះមានសារៈសំខាន់ណាស់ក្នុងការងាកទៅមើលចំនុចមូលដ្ឋាន ឬក៏ចំនុចគ្រឹះនៅពេលយើងមិនមានគំនិតអំពីថា តើយើងគួរដោះស្រាយលំហាត់យ៉ាងដូចម្តេច? វិធីនេះក៏មានសារៈសំខាន់ណាស់ដែរក្នុងការពិភាក្សាគ្នាប្រចាំថ្ងៃក្រៅពីគណិតវិទ្យា ។

ឧទាហរណ៍៖ ចូរប្រៀបធៀបតម្លៃ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $sin1$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមនិយមន័យ $360° = 2\pi$

នាំឱ្យ $1rd = \frac{360}{2\pi}$ ដឺក្រេ $= \frac{360}{2(3.1415926...)} \approx 57,296°$

ដូច្នេះ $\frac{\pi}{4} < 1rd < \frac{\pi}{3}$ នាំឱ្យ $1 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$

ដោយ $sina$ កើនក្នុងចន្លោះ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ យើងបាន $sin1 < sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

លំហាត់ប្រតិបត្តិ៖

១. ចូរប្រៀបធៀបតម្លៃ $sin1,\ sin2,\ sin4$ និង $sin9$ ។

២. ចូរពិនិត្យថា តើអនុគមន៍ $f(x)=sin(sinx)$ ជាអនុគមន៍ខួបឬទេ? ប្រសិនបើវាជាអនុគមន៍ខួប ចូររកខួបនោះ ។

៣. ប្រសិនបើអនុគមន៍ជាប់ $f(x)$ ដែលកំណត់នៅលើចំនួនពិត និងបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$f(x+y) = f(x)\sqrt{1+\{f(y)\}^2} + f(y)\sqrt{1+\{f(x)\}^2}$$ និង $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ $f(x)$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

៤. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្រសិនបើអនុគមន៍ $g(x)$ គឺជាអនុគមន៍សេស មានឌីផេរ៉ង់ស្យែល នោះអនុគមន៍ $g'(x)$ ជាអនុគមន៍គូ ។

មេរៀនទី ២ ៖ ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

វត្ថុបំណង

- កំណត់និយមន័យព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍
- គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដោយប្រើរូបមន្តគ្រឹះ ដោយប្រើអថេរជំនួស ដោយផ្នែកនិងអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន

២.១.ព្រីមីទីវ

២.១.១.និយមន័យ

ព្រីមីទីវ គឺជាដំណើរច្រាសនៃដេរីវេ។ ប្រសិនបើយើងឱ្យដេរីវេនៃអនុគមន៍មួយ យើងអាចរកអនុគមន៍ដើម ឬអនុគមន៍ព្រីមីទីវដោយប្រើដំណើរច្រាសនៃដេរីវេ។

ពិនិត្យឧទាហរណ៍ យើងដឹងថា $\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x,\ \frac{d(e^x)}{dx}=e^x$ និង $\frac{d(x^2)}{dx}=2x$ ។

យើងទទួលបានអនុគមន៍ $cosx, e^x$ និង $2x$ ជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $sinx, e^x$ និង x^2 ។

តើអ្នកអាចសន្និដ្ឋានអនុគមន៍ $sinx$ ជាអ្វីនៃអនុគមន៍ $cosx$?

ដូចគ្នាដែរ តើអ្នកអាចសន្និដ្ឋានអនុគមន៍ e^x និង x^2 ជាអ្វីនៃអនុគមន៍ e^x និង $2x$ រៀងគ្នា?

ឧទាហរណ៍១: គេទម្លាក់វត្ថុមួយពីទីដែលមានកម្ពស់ h មក ។ នៅខណៈពេល $t_0=0$ វត្ថុមានល្បឿន $V(0)=0$ ។ ក្រោមចលនាទម្លាក់សេរីខណៈពេល t អង្គធាតុផ្លាស់ទីដោយល្បឿន $V(t)=gt$ ដែល g ជាសំទុះនៃទម្លាក់សេរី។ គណនាចម្ងាយចរនៃវត្ថុនៅខណៈពេល t ។

គេតាង $S(t)$ ជាចម្ងាយចរនៅខណៈពេល t

គេដឹងថាដេរីវេនៃចម្ងាយចរស្មើនឹងល្បឿន $S'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=V(t)$ ។

គេត្រូវរក $S(t)$ ដែល $S'(t)=V(t)=gt$ ។

គេយក $S(t)=\frac{1}{2}gt^2$ ព្រោះ $S'(t)=gt$ ។

$S(t)$ ដែលគេរកបានជាព្រីមីទីវនៃ $V(t)=gt$ ។

ឧទាហរណ៍២: រក $F(x)$ ដែល $F'(x)=x^2$ ។

គេយក $F(x)=\frac{x^3}{3}$ ព្រោះ $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$

គេថា $F(x)=\frac{x^3}{3}$ ជាព្រីមីទីវនៃ $F'(x)=x^2$ ។

និយមន័យ : $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ កាលណា $F'(x)=f(x)$ ចំពោះ $\forall x$ ក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ឧទាហរណ៍គំរូ១: គេមាន $F(x)=x^3+x^2+x$ និង $f(x)=3x^2+2x+1$ កំណត់លើ□ ។
បង្ហាញថា $F(x)$ជាព្រីមីទីវ $f(x)$ f(x) លើ □ ។

ចម្លើយ

$$F'(x)=\left(x^3+x^2+x\right)'=3x^2+2x+1=f(x)$$

ដូចនេះ $F(x)$ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$លើ □ ។

ឧទាហរណ៍គំរូ២ : គេមាន $F(x)=3x^2-\sin 3x+e^{-4x}$និង $f(x)=6x-3cos3x-4e^{-4x}$ កំណត់លើ □ ។បង្ហាញថា $F(x)$ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$។

ចម្លើយ

$$F'(x)=\left(3x^2-sin3x+e^{-4x}\right)'=6x-3cos3x-4e^{-4x}=f(x)$$

ដូចនេះ $F(x)$ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$លើ □ ។

ប្រតិបត្តិ ១:

ក. រកព្រីមីទីវ $F(x)$នៃ $f(x)=sinx$ចំពោះគ្រប់ $x=$□ ។

ខ. រកព្រីមីទីវ $G(x)$នៃ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ចំពោះ $x=$□ ។

គ. អនុគមន៍ H កំណត់លើ $]0,+\infty[$ ដោយ$H(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ ។ បង្ហាញថា H ជាព្រីមីទីវ $h(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$។

ប្រតិបត្តិ ២: កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f លើ □ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក. $F(x)=(ax+b)e^{-\frac{1}{2}x}$ និង $f(x)=(5-6x)e^{-\frac{1}{2}x}$

ខ. $F(x)=\dfrac{ax+b}{e^x}$និង $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$

គ. $F(x)=(ax+b)e^{x^2}$និង $f(x)=(2x^2+6x+1)e^{x^2}$

២.១.២.ទ្រឹស្តីបទ

ឧទាហរណ៍១ : គេមានអនុគមន៍បីផ្សេងគ្នា $F(x)=x^2, G(x)=x^2+2008$ និង $H(x)=x^2-29$។

គេបាន $F'(x)=2x,\ G'(x)=2x$ និង $H'(x)=2x$។

សង្កេតឃើញថា $F'(x)=G'(x)=H'(x)=2x$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $F(x), G(x)$និង $H(x)$សុទ្ធតែជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=2x$។

គេថា $f(x)=2x$មានព្រីមីទីវច្រើនរាប់មិនអស់ ដែលពីមីទីវនីមួយៗខុសគ្នាត្រឹមតួជាចំនួនថេរ។

គេតាង ព្រីមីទីវនៃ $2x$ ដោយ $x+c$ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

ឧទាហរណ៍២: គេមានអនុគមន៍ $F(x)=e^{2x}-sin3x+2,$ $G(x)=e^{2x}-sin3x-1,$ $H(x)=e^{2x}-sin3x+21$ និង $f(x)=2e^{2x}-3cos3x$ ។

គេបាន $F'(x)=2e^{2x}-3cos3x$, $G'(x)=2e^{2x}-3cos3x$និង $H'(x)=2e^{2x}-3cos3x$

សង្កេតឃើញថា $F'(x)=G'(x)=H'(x)=2e^{2x}-3cos3x$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $F(x), G(x)$ និង $H(x)$ សុទ្ធតែជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=2e^{2x}-3cos3x$ ។

គេថា $f(x)=2e^{2x}-3cos3x$ មានព្រីមីទីវច្រើនរាប់មិនអស់ ដែលព្រីមីទីវនីមួយៗខុសគ្នាត្រឹមតួជាចំនួនថេរ។

គេតាងពីមីទីវនៃ $2e^{2x}-3cos3x$ ដោយ $e^{2x}-sin3x+c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ។

ទ្រឹស្តីបទ : បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ f មានទម្រង់ទូទៅ $F(x)+c, c$ ជាចំនួនថេរ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យកអនុគមន៍ $F(x)+c$ ទៅធ្វើដេរីវេ

គេបាន $(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$ ព្រោះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

ឧទាហរណ៍គំរូ១: រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2$ ដែល $F(3)=2$ ។

ចម្លើយ: ព្រីមីទីវនៃ $f(x)=x^2$ គឺ $F(x)=\frac{1}{3}x^3+c$ ព្រោះ $F'(x)=x^2$

ដោយ $F(3)=2$ គេបានៗ $2=\frac{1}{2}(3)^3+c, 2=9+c, c=-7$ ដូចនេះ $F(x)=\frac{1}{3}x^3-7$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ ។

សម្គាល់ : គេអាចគណនាចំនួនថេរ c បាន កាលណាគេស្គាល់តម្លៃនៃព្រីមីទីវចំពោះតម្លៃ x ណាមួយ។

ឧទាហរណ៍គំរូ២ :

ក. ដោយប្រើដេរីវេ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $G(x)=\frac{3}{2}x^2+4x$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍មួយដែលនឹងត្រូវកំណត់។

ខ. ដោយប្រើលទ្ធផលនៅ ក.ចូរបង្ហាញថា $F(x)=\frac{1}{6}(3x-4)^2$ គឺព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f ដែរ។

ចម្លើយ :

ក. គេបាន $G(x)=\frac{3}{2}(2x)+4=3x+4$

ដូចនេះ $G(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)=3x+4$ ។

ខ. គេមាន $F(x)=\frac{1}{6}(3x-4)^2=\frac{1}{6}(9x^2+24x+16)=\frac{3}{2}x^2+4x+\frac{8}{3}=G(x)+\frac{8}{3}$ ដោយ $G(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)=3x+4$ នោះ $F(x)$ ក៏ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ដែរ ។

ប្រតិបត្តិ ១:

ក. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=\cos x+1$ ដែល $F\left(\frac{x}{3}\right)=3$ ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគម៍ $F(x)=\frac{x^2}{x^2+5x}$ និង $G(x)=\frac{-5}{x+5}$ ជាព្រីមីទីវអនុគមន៍តែមួយ ។

ប្រតិបត្តិ ២: គេឱ្យអនុគមន៍ $F(x)=\ln(x^2+2mx+4)$ និង $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+4}$ ។ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ F ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f ។

២.២.អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

Johames Kepler(1571-1630)

២.២.១.និយមន័យ

ឧទាហរណ៍១: គេមានអនុគមន៍ H, G និង F កំណត់ដោយ

$H(x)=x^4+x^3+7,\ G(x)=x^4+x^3-2$ និង

$F(x)=\ x^4+x^3+c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ។

តើ $H(x),\ G(x)$ និង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=4x^3+3x^2$ ឬទេ?

គេបាន $H'(x)=4x^3+3x^2=f(x),\ G'(x)=4x^3+3x^2=f(x)$ និង

$F'(x)=4x^3+3x^2=f(x)$

គេបាន $H'(x)=G'(x)=F'(x)=f(x)=4x^3+3x^2$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $H(x), G(x)$ និង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ

$f(x)=4x^3+3x^2$ ។

ព្រីមីទីវទាំងនោះខុសគ្នាតែត្រឹមតួជាចំនួនថេរប៉ុណ្ណោះ។

សំណុំព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ $f(x)$ ហៅថា **អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ** $f(x)$ ។

គេកំណត់សរសេរដោយ $\int f(x)dx=F(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

> និយមន័យ៖ បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $f(x)$ កំណត់សរសេរដោយ $\int f(x)dx=F(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ។

រាង $F(x)=x^4+x^3+c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ។

ដូចនេះ $\int(4x^3+3x^2)dx=x^4+x^3+c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ។

ទំនាក់ទំនងរវាងដេរីវេ និងព្រីមីវអាចឱ្យគេបង្កើតបានជាវិធានក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាល។

២.២.២.រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ឧទាហរណ៍១៖ បើ $F(x)=5x$ នោះ $F'(x)=5$ ។ ដូចនេះ $\int 5dx=5x+c$ ។

បើ $F(x)=7x+8$ នោះ $F'(x)=-7x+8$ នោះ $F'(x)=-7$ ។ ដូចនេះ $\int -7dx=-7x+c$ ។

> **ជាទូទៅ៖** បើ $k\neq 0$ នោះ $\int kdx=kx+c, k\in\mathbb{R}$ ដែល c ជាចំនួនថេរ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ ព្រោះថា $(kx+c)'=k$ ដូចនេះ $\int kdx=kx+c$ ។

សម្គាល់៖ $\int dx=\int 1dx=x+c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ។

ឧទាហរណ៍២៖ បើ $F(x)=7\cos x$ នោះ $F'(x)=7\sin x$

គេបាន $\int 7\sin xdx=7(-\cos x)+c$ តែ $7\int\sin xdx=7(-\cos x)+c$

ដូចនេះ $\int 7\sin xdx=7\int\sin xdx$ ។

ជាទូទៅ៖ បើ $k \neq 0$ នោះ $\int kdx = k\int dx$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ ដោយប្រើ $\int f(x)dx = F(x)+c \Leftrightarrow (F(x)+c)' = f(x)$

គេបាន $\left[k\int f(x)dx\right]' = k\left(\int f(x)dx\right)' = k(F(x)+c)' = k\,f(x)$

ឧទាហរណ៍៖ បើ $\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}(2x)x$ ។ដូចនេះ $\int x^2dx = \frac{x^3}{3}+c = \frac{x^{1+1}}{1+1}+c$ ។

បើ $\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{3}(3x^2) = x^2$ ។ ដូចនេះ $\int x^{-6}dx = \frac{x^{-5}}{-5}+c$ ។

បើ $\left(-\frac{1}{5}x^{-5}\right)' = -\frac{1}{5}(-5x^{-6}) = x^{-6}$ ។ ដូចនេះ $\int x^{-6}dx = \frac{x^{-5}}{-5}+c = -\frac{1}{5x^5}+c$ ។

ជាទូទៅ៖ បើ $n \neq -1$ នោះ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c, c\in \mathbb{R}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ ដោយប្រើ $\int f(x)dx = F(x)+c \Leftrightarrow (F(x)+c)' = f(x)$

គេបាន $\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right] = (n+1)\frac{x^n}{n+1} = x^n$

ដូចនេះ ចំពោះ $n\neq -1, \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c, c\in \mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ បើ $F(x)' = \frac{-1}{x}$ នោះ $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ ។

បើ $F'(x) = \frac{-1}{x}+5$ នោះ $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ ។

បើ $F'(x) = \frac{-1}{x}+c$ នោះ $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ ។

ដូចនេះ $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x}+c, c\in \mathbb{R}$ ។

ជាទូទៅ៖ $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x}+c, c\in \mathbb{R}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ ដោយប្រើ $\int f(x)dx = F(x)+c \Leftrightarrow (F(x)+c)' = f(x)$

គេបាន $\left[\frac{-1}{x}+c\right] = (-1)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$

ដូចនេះ $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x}+c, c\in \mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍៥៖ បើ $F(x)' = 2\sqrt{x}$ នោះ $F'(x) = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ។

បើ $F(x)' = 2\sqrt{x+7}$ នោះ $F'(x) = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+7}} = \frac{1}{\sqrt{x+7}}$ ។

ជាទូទៅ៖ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}+c, c\in \mathbb{R}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ ដោយប្រើ $\int f(x)dx = F(x)+c \Leftrightarrow \left(F(x)+c\right)' = f(x)$

គេបាន $\left[2\sqrt{x}+c\right]' = 2\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

ដូចនេះ $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}+c, c\in\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍៥៖ បើ $F'(x) = \dfrac{1}{2}x^2+e^2+e^x-5$ នោះ $F'(x) = x+e^x$ ។

ដូចនេះ $\int\left(x+e^x\right)dx = \dfrac{1}{2}x^2+e^x+c, c\in\mathbb{R}$

ម្យ៉ាងទៀត $\int\left(x+e^x\right)dx = \int xdx+\int e^x dx = \dfrac{1}{2}x^2+c_1+e^x+c_2 = \dfrac{1}{2}x^2+e^x+c, c=c_1+c_2, c\in\mathbb{R}$

គេសង្កេតឃើញថា $\int\left(x+e^x\right)dx = \int xdx+\int e^x dx$

ជាទូទៅ៖ $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់: ដោយប្រើ ä$[F(x)+c]' = f(x)$ នោះ $\int f(x)dx = F(x)+c$

គេបាន $[F(x)\pm G(x)]' = F'(x)\pm G'(x) = f(x)\pm g(x)$

នោះ $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx = F(x)\pm G(x)+c$

ម៉្យាងទៀត

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \left[F(x)+c_1\right]\pm\left[G(x)+c_2\right]$$
$$= F(x)\pm G(x)+c, c=c_1+c_2$$

តើអ្នកអាចពន្យល់ពីរបៀបដែលយើងទាញបានរូបមន្ត (1) បានដែរឬទេ?

ដូចនេះ $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \ (1)$ ។

តាមលក្ខណៈខាងលើគេអាចពន្លាតរូបមន្តខាងលើឱ្យកាន់តែទូទៅ

ជាទូទៅ: $\int\left[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x)\right]dx = c_1\int f_1(x)dx+c_2\int f_2(x)dx+\ldots+c_n\int f_n(x)dx$

លំហាត់គំរូ១៖ គណនា $\int\left(7x^6-5x^3+2x^2+3\right)dx$ ។

ចម្លើយ : គេបាន

$$\int\left(7x^6-5x^3+2x^2+3\right)dx = \int 7x^6dx-\int 5x^3dx+\int 2x^2\int 3dx$$

$$=7\left(\frac{x^7}{7}\right)-5\left(\frac{x^4}{4}\right)+2\left(\frac{x^3}{3}\right)+3x+c$$

$$=x^7-\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x+c, c\in\mathbb{R}$$

ក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលអនុគមន៍ពហុធា យើងគណនាតួនីមួយៗដោយប្រើរូបមន្តទូទៅ ។

លំហាត់គំរូ២ : គណនា $\int\dfrac{x^3+2}{x^5}dx$ ។

ចម្លើយ : គេបាន

$$\int \frac{x^3+2}{x^5}dx=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{2}{x^5}dx$$
$$=-x^{-1}+\frac{2x^{-4}}{-4}+c$$
$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^4}+c\,,c\in\mathbb{R}$$

លំហាត់គំរូ៣ : គណនា $\int\left(\frac{2x^2+3}{x}\right)^2dx$ ។

ចម្លើយ : គេបាន

$$\int\left(\frac{2x^2+3}{x}\right)^2dx=\int\frac{4x^4+12x^2+9}{x^2}dx$$
$$=4\int x^2dx+12\int dx+9\int x^{-2}dx$$
$$=\frac{4}{3}x^3+12x-\frac{9}{x}+c\,,c\in\mathbb{R}$$

> ក្នុងដេរីវេ ចំពោះរូបមន្តផលគុណ និងរូបមន្តផលចែក ត្រូវបានគេប្រើទៅលើអនុគមន៍ផលគុណ និងផលចែក។ ប៉ុន្តែក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលមិនអាចប្រើបានទេទៅលើអនុគមន៍ផលគុណ និងផលចែក។ ជាពិសេសមុនគណនាអាំងតេក្រាលគេបង្រួមអនុគមន៍ពហុធាសិន

ប្រតិបត្តិ: គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $\int\left(7x^6+5x^4-4x^3-8\right)dx$ ខ. $\int\left(2x^2-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)dx$

គ. $\int\left(x^2-2\sqrt{x}\right)dx$ ឃ. $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx$ ។

ប្រតិបត្តិ២: គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $\int\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2dx$ ខ. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)dx$

គ. $\int\frac{x^4+7x}{x^3}dx$ ឃ. $\int\frac{x^4-7x}{x\sqrt{x}}dx$

២.២.៣.អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $y=\frac{1}{x},\ y=e^x$ និង $y=a^x\,;(a>0\,,a\neq 1)$

ឧទាហរណ៍១: បើ $x>0\ ,F(x)=\ln x\ ,F'(x)=\frac{1}{x}$

បើ $x<0\ ,G(x)=\ln(-x),\ F'(x)=\frac{1}{-x}\times(-x)'=\frac{1}{x}$

គេសង្កេតឃើញថា $F(x)=\ln x\,,(x>0)$ **និង** $G(x)=\ln(-x)\,,(x<0)$ មាន $F'(x)=G'(x)=\frac{1}{x}$ ។

ដូចនេះ: $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c\,,c\in\mathbb{R}$ ។

> **ជាទូទៅ:** $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c\,,c\in\mathbb{R}$ ដែល $x\neq 0$

ឧទាហរណ៍២: បើ $F(x)=e^x+8$ នោះ $F'(x)=e^x$

បើ $F'(x)=e^x-33$ នោះ $F'(x)=e^x$

បើ $F(x)=e^x+c$ នោះ $F'(x)=e^x$ ។

ដូចនេះ $\int e^x dx=e^x+c\,,c\in\mathbb{R}$

ជាទូទៅ: $\int e^x dx=e^x+c\,,c\in\mathbb{R}$ ។

ព្រោះថា $\left(e^x+c\right)'=e^x$ ។ ដូចនេះ $\int e^x dx=e^x+c\,,c\in\mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូ៣: គណនាអាំងតេក្រាល $\int\left(2e^x-\frac{3}{x}\right)dx$

ចម្លើយ : $\int\left(2e^x-\frac{3}{x}\right)dx=2\int e^x dx-3\int\frac{1}{x}dx=2e^x-3\ln|x|+c\,,c\in\mathbb{R}$

ឧទាហរណ៍៤: បើ $F(x)=\frac{a^x}{\ln a}-10\,,a>0\,,a\neq 1$ នោះ $F'(x)=a^x$

បើ $F(x)=\frac{a^x}{\ln a}+8\,,a>0\,,a\neq 1$ នោះ $F'(x)=a^x$

បើ $F(x)=\frac{a^x}{\ln a}+c\,,a>0\,,a\neq 1$ នោះ $F'(x)=a^x$ ។

ដូចនេះ $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c\,,c\in\mathbb{R}$ ។

ជាទូទៅ: បើ $a>0\,,a\neq 1$ នោះ $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c\,,c\in\mathbb{R}$

លំហាត់គំរូ៥: គណនាអាំងតេក្រាល $\int\left(2^x-\frac{5}{x}+3e^x\right)dx$ ។

ចម្លើយ : $\int\left(2^x-\frac{5}{x}+3e^x\right)dx=\int 2^x dx-5\int\frac{1}{x}dx+3\int e^x dx$

$$=\frac{2^x}{\ln a}-5\ln|x|+3e^x+c\,,c\in\mathbb{R}$$

លំហាត់គំរូ៦: $\int\left(5^{-x}\ln 5-\frac{3}{2\sqrt{x}}-e^x\right)dx$

ចម្លើយ : $\int\left(5^{-x}\ln 5-\frac{3}{2\sqrt{x}}-e^x\right)dx=(\ln 5)\int\left(\frac{1}{5}\right)^x dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx-\int e^x dx$

$$=-5^{-x}-3\sqrt{x}-e^x+c\,,c\in\mathbb{R}$$

ប្រតិបត្តិ១: គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $\int\left(\frac{e^x}{2}+\frac{1}{x}\right)dx$ ខ. $\int\left(2e^x+\frac{6}{x}+\ln 5\right)dx$ គ. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}+x-2e\right)dx$

ប្រតិបត្តិ២: គណនាអាំងតេក្រាលៈ

ក. $\int\left(-\frac{e^x}{4}+\frac{4}{x}-x\right)dx$ ខ. $\int\left(-5^x-\frac{2}{3x}+e^x\right)dx$ គ. $\int\left(\frac{2}{3\sqrt{x}}-\frac{5}{2x}+x-3^{-x}\right)dx$

២.២.៤.អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ឧទាហរណ៍១: បើ $F(x)=-\cos x+5$ នោះ $F'(x)=\sin x$

បើ $F(x)=-\cos x-5$ នោះ $F'(x)=\sin x$

បើ $F(x)=-\cos x+c$ នោះ $F'(x)=\sin x$

ជាទូទៅ: $\int \sin x dx=-\cos x+c\ ,c\in\mathbb{R}$

ព្រោះថា $(-\cos x+c)'=\sin x$ ។ ដូចនេះ $\int \sin x dx=-\cos x+c\ ,c\in\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរហ៍២: បើ $F(x)=\sin x+10$ នោះ $F'(x)=\cos x$

បើ $F(x)=\sin x-6$ នោះ $F'(x)=\cos x$

បើ $F(x)=\sin x+c$ នោះ $F'(x)=\cos x$

ជាទូទៅ: $\int \cos x dx=\sin x+c\ ,c\in\mathbb{R}$ ។

ព្រោះថា $(\sin x+c)'=\cos x$ ។ ដូចនេះ $\int \cos x dx=\sin x+c\ ,c\in\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍៣: បើ $F(x)=\tan x+5$ នោះ $F'(x)=\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$

បើ $F(x)=\tan x-8$ នោះ $F'(x)=\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$

បើ $F(x)=\tan x+c$ នោះ $F'(x)=\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$

ជាទូទៅ: $\int(\tan^2 x+1)dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c\ ,c\in\mathbb{R}$ ។

ព្រោះថា $(\tan x+c)'=\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$ ។ ដូចនេះ $\int(\tan^2+1)dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c\ ,c\in\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍៤ : បើ $F(x)=-\cot x+5$ នោះ $F'(x)=\cot^2 x+1=\frac{1}{\sin^2 x}$

បើ $F(x)=-\cot x-4$ នោះ $F'(x)=\cot^2 x+1=\frac{1}{\sin^2 x}$

បើ $F(x)=-\cot x+c$ នោះ $F'(x)=\cot^2 x+1=\frac{1}{\sin^2 x}$

ជាទូទៅ: $\int(\cot^2 x+1)dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=\cot x+c\ ,c\in\mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូ: គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int(5\sin x-3\cos x)dx$ ខ. $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$ គ. $\int(\tan x+\cot x)^2 dx$ ។

ចម្លើយ:

ក. $\int(5\sin x-3\cos x)dx=5\int\sin xdx-3\int\cos xdx=-5\cos x-3\sin x+c\,,c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\int(5\sin x-3\cos x)dx=-5\cos x-3\sin x+c\,,c\in\mathbb{R}$ ។

ខ. $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx=2\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+3\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=2\tan x-3\cot x+c\,,c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx=2\tan x-3\cot x+c\,,c\in\mathbb{R}$ ។

គ. $\int(\tan x+\cot x)^2 dx=\int\left(\tan^2 x+2\tan x\cot x+\cot^2\right)dx=\int\left(\tan^2 x+2+\cot^2 x\right)dx$

$=\int\left(\tan^2 x+1\right)dx+\int\left(\cot^2 x+1\right)dx=\tan x-\cot x+c\,,c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\int(\tan x+\cot x)^2 dx=\tan x-\cot x+c\,,c\in\mathbb{R}$ ។

ប្រតិបត្តិ១: គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int\left(\sin x+\frac{2}{3}\cos x\right)dx$ ខ. $\int(1+\cos x)dx$ គ. $\int\left(\frac{4}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}-5\right)dx$

ឃ. $\int(\tan x-\cot x)^2 dx$ ង. $\int\sin^2 xdx+\int\cos^2 xdx$ ច. $\int\left(\frac{5}{\cos^2 x}-\frac{4}{\sin^2 x}+x\sqrt{x}\right)dx$

ប្រតិបត្តិ២ : គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int(-2\sin x+3\cos x+2)dx$ ខ. $\int\left(1-\tan^2 x\right)dx$ គ. $\int\left(\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{e}{\cos^2 x}-5\ln 2\right)dx$

ឃ. $\int(2\tan x-3\cot x)^2 dx$ ង. $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ ច. $\int\left(\frac{5}{\cos^2 x}-2\cot^2 x+\frac{2}{x}\right)dx$

២.២.៥.ការគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដោយប្រើអថេរជំនួស និងអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ក. ការគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដោយប្រើអថេរជំនួស

ឧទាហរណ៍១: ក. គេឱ្យ $y=f(x)=X^3$ ។ រក dy

ខ. គេឱ្យ $u=F(x)=\ln x$ ។ រក du

គ. គេឱ្យ $t=g(x)e^{x^2}$ ។ រក dt

ចម្លើយ:

ក. គេបាន $\frac{dy}{dx}=f'(x)=3x^2$ ដូចនេះ $dy=3x^2dx$

ខ. គេបាន $\frac{du}{dx}=F'(x)=\frac{1}{x}$ ដូចនេះ $du=\frac{1}{x}dx$

គ. គេបាន $\frac{dt}{dx}=g'(x)=\left(x^2\right)'e^{x^2}$ ដូចនេះ $dt=2xe^{x^2}dx$

ឧទាហរណ៍២: គណនាអាំងតេក្រាល $B=\int (2x)\left(x^2+1\right)^5 dx$ ។

តាង $t=x^2+1 \Rightarrow dt=2xdx$

គេបាន $A=\int t^5 dt=\frac{1}{6}t^6+c=\frac{1}{6}\left(x^2+1\right)+c\,,\, c\in\mathbb{R}$

ឧទាហរណ៍៣: គណនាអាំងតេក្រាល $B=\int \sin(2x+7)dx$

តាង $t=2x+7 \Rightarrow dt=2dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$

គេបាន $B=\int \sin t\left(\frac{1}{2}dt\right)=\frac{1}{2}\int \sin t dt=-\frac{1}{2}\cos t+c=-\frac{1}{2}\cos(2x+7)+c\,,\, c\in\mathbb{R}$

ឧទាហរណ៍៤: គណនាអាំងតេក្រាល $C=\int \sin^2 x\cos x dx$

តាង $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x dx$

គេបាន $C=\int \sin^2 x\cos x dx=\int t^2 dt=\frac{1}{3}t^3+c=\frac{1}{3}\sin^3 x+c\,,\, c\in\mathbb{R}$

ឧទាហរណ៍៥: គណនាអាំងតេក្រាល $D=\int\left(1+X^3\right)^5 dX$

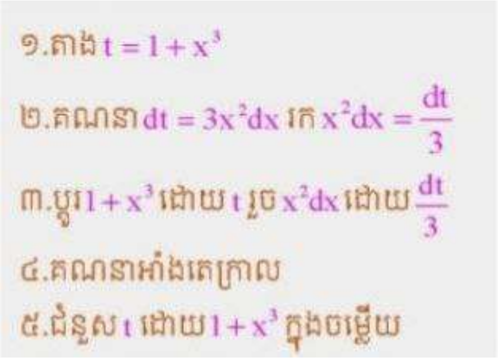
យើងពិនិត្យមើលដេរីវេនៃ $1+X^3$ គឺ $3X^2$

អនុគមន៍ដែលត្រូវគណនាអាំងតេក្រាលមានតួ X^2

តាង $t=1+X^3 \Rightarrow dt=3X^2dX \Rightarrow X^2dX=\frac{dt}{3}$

ដូចនេះ $D=\int\left(1+X^3\right)^5 X^2dX=\int t^5\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int t^5 dt$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{t^6}{6}+c=\frac{1}{18}\left(1+X^3\right)^6+c\,,\, c\in\mathbb{R}$$



តាមឧទាហរណ៍ខាងលើ គេបានវិធានសម្រាប់គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួសតាម៥ជំហាន

- ជ្រើសរើស $t=f(X)$
- គណនា dt មានន័យថា $dt=dt=f'(X)dX$
- ជំនួសកន្សោមនៃអនុគមន៍ក្នុងអាំងតេក្រាលជាអនុគមន៍នៃ t
- គណនាអាំងតេក្រាលនៃអថេរថ្មីនោះ
- ជំនួស t ជាអនុគមន៍នៃ X វិញ

ដូចនេះគេបានចម្លើយអាំងតេក្រាលចុងក្រោយជាអនុគមន៍នៃ X ។

ជាទូទៅ:

1) $\int kf'(x)dx = kf(x)+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

2) $\int [f(x)]^n f'(x)dx = \dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

3) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

4) $\int \dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}dx = \dfrac{-1}{f(x)}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

5) $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

6) $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

7) $\int \sin[f(x)]f'(x)dx = -\cos[f(x)]+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

8) $\int \cos[f(x)]f'(x)dx = \sin[f(x)]+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

9) $\int [1+\tan^2[f(x)]]f'(x)dx = \int \dfrac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}dx = \tan[f(x)]+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

10) $\int [1+\cot^2[f(x)]]f'(x)dx = \int \dfrac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]}dx = -\cot[f(x)]+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

លំហាត់គំរូ១ : គណនាអាំងតេក្រាល

$\int (x^2+3x-1)^4(2x+3)dx$ ។

ចម្លើយ :

ប្រើរូបមន្ត $\int [f(x)]^n f'(x)dx = \dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

របៀបទី១៖

$$\int (x^2+3x-1)^4(2x+3)dx = \int (x^2+3x-1)^4(2x+3-1)'dx = \frac{1}{5}(x^2+3x-1)^5+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\int (x^2+3x-1)^4(2x+3)dx = = \dfrac{1}{5}(x^2+3x-1)^5+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$ ។

របៀបទី២៖

អាំងតេក្រាលប្រើអថេរជំនួស

តាង $t = x^2+3x-1 \Rightarrow dt = (2x+3)dx$

គេបាន

$$\int (x^2+3x-1)^4(2x+3)dx = \int t^4dt = \frac{t^5}{5}+c = \frac{1}{5}(x^2+3x-1)^5+c$$

ដូចនេះ $\int (x^2+3x-1)^4(2x+3)dx = \dfrac{1}{5}(x^2+3x-1)^5+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូ២ : គណនាអាំងតេក្រាល $\int 8x^3\sin x^4dx$ ។

ចម្លើយ៖

របៀបទី១៖

$$\int 8x^3\sin x^4dx = 2\int 4x^3\sin x^4dx = 2\int \sin x^4\left(x^4\right)'dx = -2\cos x^4 + c\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\int 8x^3\sin x^4dx = -2\cos x^4 + c\ ,\ c\in\mathbb{R}$ ។

របៀបទី២៖

តាង $t = x^4 \Rightarrow dt = 4x^3dx$

គេបាន $\int 8x^3\sin x^4dx = \int 2\sin t dt = -2\cos t + c = -2\cos x^4 + c,\ c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\int 8x^3\sin x^4dx = -2\cos x^4 + c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

ប្រតិបត្តិ ១ : គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int \frac{x}{\left(x^2-3\right)^4}dx$　　ខ. $\int \frac{e^x}{\left(e^x+2\right)}dx$　　គ. $\int 8\sin x\cos^5 xdx$

ឃ. $\int \sin^4 x\cos xdx$　　ង. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 2021}}dx$　　ច. $\int \frac{e^x}{\left(2-e^x\right)^2}dx$

ប្រតិបត្តិ ២ :

ក. $\int x\left(x^2+1\right)^{23}dx$　　ខ. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$　　គ. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

ឃ. $\int \frac{2}{e^x+1}dx$　　ង. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}dx$　　ច. $\int \frac{(1+x)}{x\left(1+xe^x\right)}dx$

ខ. អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

គេមានអនុគមន៍ u និង v ដែលមានដេរីវេ u' និង v'

គេបាន $(uv)' = u'v + v'u$ បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

នាំឱ្យ $\int (uv)'dx = \int (u'v+v'u)dx = \int u'vdx + \int v'udx$

$$uv = \int u'vdx + \int v'udx$$

គេទាញបាន $\int udv = uv - \int vdu$ គឺជាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

> រំលឹក: រូបមន្តដេរីវេនៃផលគុណ
>
> $(uv)' = u'v + v'u$ និង
>
> $\frac{du}{dx} = u' \Rightarrow du = u'dx$

រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int udv = uv - \int vdu$

លំហាត់គំរូ១ : ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរគណនា $\int xe^xdx$ ។

ចម្លើយ : តាង $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = e^xdx \Rightarrow v = e^x$$

តាមរូបមន្ត $\int udv = uv - \int vdu$

$$\int xe^xdx = xe^x - \int e^xdx = xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\int xe^xdx = (x-1)e^x + c\ ,\ c\in\mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូ២ : ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរគណនា $\int \ln x dx$ ។

ចម្លើយ : គេមាន $\int \ln x dx = \int 1 \times \ln x dx$

តាង $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = 1dx \Rightarrow v = x$

តាមរូបមន្ត $\int udv = uv - \int vdu$

$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \times \frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c = (\ln x - 1)x + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $\int \ln x dx = x\ln x - x + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$ ។

វិធាន៖ $\int udv = uv - \int vdu$

១. បើ $\int P(x)\times\cos(ax+b)dx$ ឬ $\int P(x)\times\sin(ax+b)dx$ ឬ $\int P(x)\times e^{ax+b}dx$ ដែល $P(x)$ ជាពហុធា តាងដោយ $u = P(x)$ ។

២. បើ $\int P(x)\times\ln(ax+b)dx$ ដែល $P(x)$ ជាពហុធា តាងដោយ $u = \ln(ax+b)$ ។

៣. បើ $\int e^{ax+b}\times\begin{bmatrix}\sin(ax+\beta)\\ \cos(ax+\beta)\end{bmatrix}dx$ តម្រូវឱ្យយើងធ្វើអាំងតេក្រាលចំនួនពីរលើកដោយរក្សាការតាងមានន័យថា៖

លើកទី១ : តាង u ជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលើកទី២តាង u ជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ឬលើកទី១: តាង u ជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និងលើកទី២ តាង u ជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ។

លំហាត់គំរូ៣ : ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរគណនា $\int (3x+2)\sin x\ dx$ ។

ចម្លើយ : តាង $u = 3x+2 \Rightarrow du = 3dx$

$dv = \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x$

តាមរូបមន្ត $\int udv = uv - \int vdu$

$\int (3x+2)\sin x\ dx = -(3x+2)\cos x - \int(-3)\cos xdx = -(3x+2)\cos x + 3\int\cos xdx$

$= -(3x+2)\cos x + 3\sin x + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $\int (3x+2)\sin x\ dx = -(3x+2)\cos x + 3\sin x + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូ៤ : ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរគណនា $\int e^x \cos x\ dx$ ។

ចម្លើយ : តាង $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$dv = \cos xdx \Rightarrow v = \sin x$

តាមរូបមន្ត $\int udv = uv - \int vdu$

$\int e^x\cos x\ dx = e^x\sin x - \int e^x\sin xdx \quad (1)$

- ដោយគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int e^x \sin x\ dx$ ម្តងទៀត

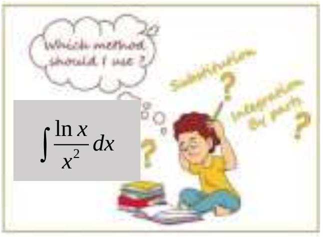
តាង $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$dv = \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x$

តាមរូបមន្ត $\int udv = uv - \int vdu$

$\int e^x\sin x\ dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos xdx \quad (2)$

❖ យក (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន៖



$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$2\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + c_1$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x \cos x + c \ , \ c = \frac{c_1}{2} \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x \cos x + c \ , \ c = \frac{c_1}{2} \in \mathbb{R}$ ។

ប្រតិបត្តិ១ : ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរណនា៖

ក. $\int (1-2x)\cos x dx$ ខ. $\int (5x-4)\ln x dx$ គ. $\int x\sqrt{x+1} \, dx$

ប្រតិបត្តិ២ : ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរណនា៖

ក. $\int (2x-3)\cos x dx$ ខ. $\int \ln x^3 dx$ គ. $\int (-x+3)\sin 2x \, dx$

ឃ. $\int \left(x^2-2\right)e^{-2x} dx$ ង. $\int (2x+1)\cos(3x-1) dx$ ច. $\int \ln(x+2) dx$

ឆ. $\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$ ជ. $\int \left(\frac{\ln x}{x^3}\right) dx$ ឈ. $\int x^2 e^x dx$

២.២.៦.អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន

ឧទាហរណ៍៖

ក. គណនា $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}$

ខ. រួចរកចំនួនពិត A និង B ដោយដឹងថា $\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}, x \neq \{-1, 3\}$

ចម្លើយ :

ក. $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} = \frac{2(x-3)+3(x+1)}{(x+1)(x-3)}$

$= \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}$

តម្រូវភាគបែង រួចពន្លាត

ដូចនេះ $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} = \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}$

ខ. គេមាន $\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$

របៀបទី១៖ ផ្ទឹមមេគុណ (Equating coefficients)

$$\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{(A+B)x-3A+B}{(x+1)(x-3)}$$

ពហុធាពីរស្មើគ្នាចំពោះគ្រប់តម្លៃ x កាលណាមេគុណដែលមានដឺក្រេដូចគ្នាស្មើគ្នា។

គេបាន $5x-3 = (A+B)x-3A+B$

ដោយផ្ទឹមមេគុណនោះ គេបាន $\begin{cases} A+B=5 \\ B-3A=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}$

ដូចនេះ ចំនួនពិត $A=2$, $B=3$ ។

វិបាក $\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}$ ។

របៀបទី២៖ ជ្រើសរើសតម្លៃ x សមស្រប (Choose appropriate values for x)

$$\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}$$

$$5x-3=A(x-3)+B(x+1)$$

បើ $x=-1$, $5(-1)-3=A(-1-3)\Rightarrow A=2$

បើ $x=3$, $5(3)-3=B(3+1)\Rightarrow B=3$

ដូចនេះ ចំនួនពិត $A=2$, $B=3$ ។

> គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(x-1)(x+3)$
>
> ក្នុងរបៀបទី២
> ក. ហេតុអ្វីបានជាគេជ្រើសរើសយក $x=-1$ និង $x=3$?
> ខ. តើគេអាចជ្រើសរើសតម្លៃ x ផ្សេងទៀតណាសម្រាប់ជំនួសក្រៅពី $x=-1$ និង $x=3$?

របៀបទី៣៖ $\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}$

តាង $P(x)=5x-3$ និង $Q(x)=(x+1)(x-3)$

គេបាន $A=\frac{P(-1)}{Q'(-1)}=\frac{5(-1)-3}{2(-1)-2}=2$

ដែល $Q'(x)=2x-2$

$$B=\frac{P(3)}{Q'(3)}=\frac{5(3)-3}{2(3)-2}=\frac{12}{3}=3$$

ដូចនេះ ចំនួនពិត $A=2$, $B=3$ ។

> ទ្រឹស្តីបទ៖ ឧបមា $Q(x)=0$ មាន m ឫសងាយ $a_1,a_2,\dots,a_q$ ។ គេបាន
>
> $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+\dots+a_1x+a_0}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)}$$
> $$=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\dots+\frac{A_m}{x-a_m}$$ ដែល
> $$A_1=\frac{P(a_1)}{Q'(a_1)},A_2=\frac{P(a_2)}{Q'(a_2)},\dots,A_m=\frac{P(A_m)}{Q'(a_m)}$$?

ឧទាហរណ៍២៖ គណនា $\int\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}dx$

ចម្លើយ៖

ពីឧទាហរណ៍១ គេមាន $\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}$

នោះ៖ $\int\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}\right)dx=2\int\frac{1}{x+1}dx+3\int\frac{1}{x-3}dx$

$$=2\int\frac{(x+1)'}{(x+1)}dx+3\int\frac{(x-3)'}{x-3}dx=2\ln|x+1|+3\ln|x-3|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះ៖ $\int\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}dx=2\ln|x+1|+3\ln|x-3|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

> ១.រាង $\int\frac{px+q}{(ax+b)(cx+d)}dx$ គេត្រូវសរសេរជារាង $\frac{px+q}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}$

ឧទាហរណ៍៣៖

ក) ចូរសរសេរប្រភាគ $\frac{1}{x^2-5x+6}$ ជាផលបូកនៃប្រភាគងាយ(ប្រភាគដោយផ្នែក Partial fractions) ។

ខ) ទាញរក $\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$ ។

ចម្លើយ៖

ក) ប្រភាគ $\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-3)(x-2)}$

គេបាន $\frac{1}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$

$1=A(x-2)+B(x-3)$

បើ $x=2, 1=-B \Rightarrow B=-1$

បើ $x=3, 1=A$

ដូចនេះផលបូកនៃប្រភាគងាយ $\frac{1}{x^2-5x+6}$ គឺ $\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$

ខ) ទាញរក $\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$ គេបាន $\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$

នោះ $\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right)dx=\int\left[\frac{(x-3)'}{x-3}-\frac{(x-2)'}{x-2}\right]dx$

$=\ln|x-3|-\ln|x-2|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx=\ln|x-3|-\ln|x-2|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

២. រាង $\int \frac{k}{(ax+b)(cx+d)}dx$ គេត្រូវសរសេរជារាង $\frac{k}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}$

ឧទាហរណ៍៤៖

ក) ចូរសរសេរប្រភាគ $\frac{6x+7}{(x+2)^2}$ ជាផលបូកនៃប្រភាគងាយ(ប្រភាគដោយផ្នែក Partial fractions)

ខ) ទាញរក $\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}dx$ ។

ចម្លើយ៖

ក) សរសេរ $\frac{6x+7}{(x+2)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}=\frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}=\frac{Ax+2A+B}{(x+2)^2}$

គេបាន $6x+7=Ax+2A+B$ ដោតផ្ទឹមមេគុណ

នោះគេបាន $\begin{cases}A=6\\2A+B=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=6\\B=-5\end{cases}$

ដូចនេះ ផលបូកនៃប្រភាគងាយ $\frac{6x+7}{(x+2)^2}$ គឺ $\frac{6x+7}{(x+2)^2}=\frac{6}{x+2}+\frac{-5}{(x+2)^2}$ ។

ខ) ទាញរក $\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}dx$

តាមសម្រាយខាងលើ

គេបាន

$$\int\frac{6x+7}{(x+2)^2}dx=\int\left(\frac{6}{x+2}+\frac{-5}{(x+2)^2}\right)dx=6\int\frac{(x+2)'}{x+2}dx-5\int\frac{(x+2)'}{(x+2)^2}dx$$

$$=6\ln|x+2|+\frac{5}{x+2}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\int\frac{6x+7}{(x+2)^2}dx=6\ln|x+2|+\frac{5}{x+2}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

៣. រាង $\int\frac{\alpha x+\lambda}{(ax+b)^2}dx$ គេត្រូវសរសេរជារាង $\frac{\alpha x+\lambda}{(ax+b)^2}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}$

លំហាត់គំរូ៥៖ គណនា $\int\frac{(2x+4)}{x^3-2x^2}dx$ ។

គេសរសេរ $\frac{(2x+4)}{x^3-2x^2}=\frac{(2x+4)}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}=\frac{Ax(x-2)+B(x-2)+cx^2}{x^2(x-2)}$

គេបាន $2x+4=Ax(x-2)+B(x-2)+cx^2$

បើ $x=0\ ,\ 4=-2B\Rightarrow B=-2$

បើ $x=2\ ,\ 2\times2+4=4C\Rightarrow C=2$

បើ $x=1\ ,\ 2\times1+4=-A-B+C\Rightarrow A=-2$

នោះ $\frac{(2x+4)}{x^3-2x^2}=\frac{-2}{x}+\frac{-2}{x^2}+\frac{2}{x-2}$

គេបាន $\int\frac{(2x+4)}{x^3-2x^2}dx=\int\left(\frac{-2}{x}+\frac{-2}{x^2}+\frac{2}{x-2}\right)dx=-2\int\frac{1}{2}dx-2\int\frac{1}{x^2}dx+2\int\frac{1}{x-2}dx$

$$=-2\int\frac{1}{2}dx-2\int\frac{1}{x^2}dx+2\int\frac{(x-2)'}{x-2}dx=-2\ln|x|+\frac{2}{x}+2\ln|x-2|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\int\frac{(2x+4)}{x^3-2x^2}dx=-2\ln|x|+\frac{2}{x}+2\ln|x-2|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

៤. រាង $\int\frac{\alpha x+\lambda}{(ax+b)(cx+d)^2}dx$ ត្រូវបានសរសេរជារាង $\frac{\alpha x+\lambda}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}+\frac{c}{(cx+d)^2}$

លំហាត់គំរូ៦៖ គណនា $\int\frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3}dx$

គេសរសេរ $\frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3}=\frac{2x^2+5x-11}{(x+3)(x-1)}$

$$\frac{2x^2+5x-11}{(x+3)(x-1)}=A+\frac{B}{x+3}+\frac{c}{x-1}$$

$$2x^2+5x-11=A(x+3)(x-1)+B(x-1)+C(x+3)\quad(1)$$

បើ $x=1$ តាមសមីការ $(1):-4=4C\Rightarrow C=-1$

បើ $x=-3$ តាមសមីការ $(1):-8=-4B\Rightarrow B=2$

បើ $x=0$ តាមសមីការ $(1): -11=-3A-B+3C \Rightarrow -3A=-6 \Rightarrow A=2$

៥. រាង $\int \frac{\alpha x^2+\beta x+\lambda}{(ax+b)(cx+d)}dx$ ត្រូវគេសរសេរជារាង $\frac{\alpha x^2+\beta x+\lambda}{(ax+b)(cx+d)}=A+\frac{B}{ax+b}+\frac{C}{cx+d}$

ជាទូទៅ៖ គេអាចបំបែកប្រភាគ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ជាប្រភាគងាយតាមករណី $Q(x)$ ដូចខាងក្រោម៖

ក. ករណី $Q(x)=(ax+b)(cx+d)(ex+f)...$

គេបាន $\frac{P(x)}{Q(x)}=A(x)+\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{cx+d}+\frac{A_3}{ex+f}+...$ ដែល A_1 , A_2 , A_3 ,... ជាចំនួនពិតថេរត្រូវកំណត់។

- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ស្មើដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)$ ជាចំនួនពិតថេរ
- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ តូចជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)=0$
- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ធំជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)$ ជាពហុធា។

ខ. ករណី $Q(x)=(ax+b)^n$

គេបាន $\frac{P(x)}{Q(x)}=A(x)+\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(cx+d)^2}+...+\frac{A_n}{(ex+f)^n}$ ដែល $A_1,A_2,...,A_n$ ជាចំនួនពិតថេរត្រូវកំណត់

- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ស្មើដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)$ ជាចំនួនថេរ
- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ តូចជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)=0$
- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ធំជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)$ ជាពហុធា។

លំហាត់គំរូ១ ៖ គណនា $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$ ។

គេមាន $\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+2}=\frac{A_1(x+2)+A_2(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{(A_1+A_2)x+(2A_1-A_2)}{(x-1)(x+2)}$

គេបាន $1=(A_1+A_2)x+(2A_1-A_2)$ ដោយផ្ទឹមមេគុណ នោះគេបាន $\begin{cases}A_1+A_2=0\\2A_1-A_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\frac{1}{3}\\A_2=-\frac{1}{3}\end{cases}$

គេបាន

$$\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}}{x+2}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{(x-1)'}{x-1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{(x+2)'}{x+2}dx=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+c\ ,c\in\mathbb{R}$$

ប្រតិបត្តិ១៖ គណនាអាំងតេក្រាលនាអនុគមន៍សនិទានខាងក្រោម៖

ក. $\int\frac{1}{x^2+3x-4}dx$ ខ. $\int\frac{5x-13}{(x+3)(x-2)}dx$ គ. $\int\left(\frac{x^3}{x^2-2x+1}\right)dx$ ។

ប្រតិបត្តិ២៖ គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x^2+2}$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត $A, B\&C$ ដើម្បីឱ្យសរសេរជារាង $f(x)=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$ ។

ខ. ទាញរក $\int f(x)dx$ ។

២.៣.អនុវត្តន៍អាំងតេក្រាល

ឧទាហរណ៍១៖ ស្ថានីយវិទ្យុមួយកំពុងតែចាប់ផ្តើមបង្កើតការផ្សព្វផ្សាយពាណិជ្ជកម្មដើម្បីបង្កើតចំនួនអ្នកស្តាប់ប្រចាំថ្ងៃ។ បច្ចុប្បន្ននេះអ្នកស្តាប់វិទ្យុនេះជាប្រចាំមានចំនួន 27000 នាក់ ហើយគេសង្ឃឹមថាក្នុងមួយថ្ងៃចំនួនអ្នកស្តាប់ S(t) នឹងកើនឡើងតាមអត្រា S'(t)=60$\sqrt{t}$ ដែល t ជាចំនួនថ្ងៃគិតថ្ងៃចាប់ផ្តើមបង្កើតការផ្សព្វផ្សាយ។ តើគេត្រូវប្រើរយៈពេលប៉ុន្មាន ប្រសិនបើស្ថានីយវិទ្យុនេះចង់ឱ្យចំនួយអ្នកស្តាប់ប្រចាំថ្ងៃកើនរហូតដល់ 41000 នាក់។

ចម្លើយ: គេត្រូវដោះស្រាយសមីការ S(t)= 41000

តាមបម្រាប់ គេមាន S'(t)=60$\sqrt{t}$ និង S(0)= 27000

បើ S'(t)=60$\sqrt{t}$ នោះ S(t)=$\int S'(t)dt=\int 60\sqrt{t}\,dt=\int 60t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{120}{3}t^{\frac{3}{2}}+c=40t^{\frac{3}{2}}+c, c\in\mathbb{R}$

ដោយ S(0)= 27000 នោះ $27000=40(0)^{\frac{3}{2}}+c\Rightarrow c=27000$

ដូចនេះ $S(t)=40t^{\frac{3}{2}}+27000=40\sqrt{t^3}+27000$

តាមសមីការ $S(t)=41000$ គេបាន

$40\sqrt{t^3}+27000=41000\Rightarrow\sqrt{t^3}=\frac{41000-27000}{40}=350\Rightarrow t=49.66\approx 50$ ដូចនេះគេត្រូវប្រើពេល 50 ថ្ងៃ។

ឧទាហរណ៍២៖ វត្ថុមួយផ្លាស់ទីតាមទិសឈរ។ រយៈពេល t វិនាទីក្រោយមកវត្ថុនោះផ្លាស់ទីដោយល្បឿន $V(t)=96-32t(m/s)$ ។

ក. រកកម្ពស់ S(t) ដោយដឹងថាវត្ថុនោះផ្លាស់ទីពីកម្ពស់ $S(0)=18m$ ។

ខ. រកកម្ពស់ $S(t)$ រយៈពេល $t=3s$ ។

ចម្លើយ

ក. រកកម្ពស់ S(t) ដោយដឹងថាវត្ថុនោះផ្លាស់ទីពីកម្ពស់ $S(0)=18m$ រយៈពេល t វិនាទីក្រោយមកវត្ថុនោះផ្លាស់ទីដោយល្បឿន $V(t)=96-32t(m/s)$ គេបាន $V(t)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=S'(t)$ នោះ

$S(t)\int v(t)dt=\int(96-32t)dt=96t-16t^2+c, c\in\mathbb{R}$ ដោយដឹងថាវត្ថុនោះផ្លាស់ទីពីកម្ពស់ $S(t)=18m$

នោះ $96(0)-16(0)^2+c\Rightarrow c=18$

ដូចនេះ កម្ពស់ $S(t)$ នៃវត្ថុផ្លាស់ទីនៅរយៈពេល t វិនាទីក្រោយមកគឺ $S(t)=-16t^2+96t+18$ ។

ខ. រកកម្ពស់ $S(t)$ រយៈពេល $t=3s$

ពេល $t=3s$ គេបានកម្ពស់នៃវត្ថុផ្លាស់ទីគឺ $s(3)=-16(3)^2+96(3)+18=162m$

ដូចនេះកម្ពស់នៃវត្ថុផ្លាស់ទីនៅរយៈពេល $t=3s$ គឺ $162m$ ។

ប្រតិបត្តិ: អត្រាកំណើនប្រជាពលរដ្ឋក្នុងទីក្រុងមួយជាអនុគមន៍ $P'(t)=5+4t^{\frac{1}{3}}$ នាក់ក្នុងមួយខែដែល t ជាចំនួនខែ។ បើគេដឹងថាចំនួនប្រជាពលរដ្ឋអនុគមន៍បច្ចុប្បន្នមាន 2000000 នាក់។ រកអនុគមន៍នៃចំនួនប្រជាពលរដ្ឋនៅរយៈពេល 8 ឆ្នាំទៅមុនទៀត។

មេរៀនសង្ខេបរូបមន្ត:

១.រូបមន្តអាំងតេក្រាល

1. $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$
2. $\int Kdx=Kx+c\ (c\in □)$
3. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\ (n\neq -1)$
4. $\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{-1}{x}+c$
5. $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$
6. $\int e^x dx=e^x+c$
7. $\int \sin x dx=-\cos x+c$
8. $\int \cos x dx=\sin x+c$
9. $\int f'(x)dx=f(x)+c$
10. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$
11. $\int\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
12. $\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$
13. $\int P^n(x)P(x)dx=\frac{\left[P(x)\right]^{n+1}}{n+1}+c\ (n\neq -1)$
14. $\int \tan x dx=-\ln|\cos x|+c$
15. $\int e^{p(x)}P'(x)dx=e^{u(x)}+c$
16. $\int\frac{P(x)}{P(x)}dx=\ln|P(x)|+c$
17. $\int\frac{P'(x)}{\sqrt{P(x)}}dx=2\sqrt{P(x)}+c$
18. $\int P'(x)\sin P(x)dx=-\cos p(x)+c$
19. $\int P'(x)\cos P(x)dx=\sin p(x)+c$
20. $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int(\tan^2 x+1)dx=\tan x+c$
21. $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=\int(\cot^2 x+1)dx=-\cot x+c$
22. $\int a^{\alpha x+\beta}dx=\frac{1}{\alpha}\times\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a}+c$
23. $\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
24. $\int\frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx=\frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$

២. អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int udv=uv-\int vdu$ ។

៣. អាំងតេក្រាលអនុគមន៍សនិទាន

គេអាចបំបែកប្រភាគ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ជាប្រភាគងាយតាមករណី $Q(x)$ ដូចខាងក្រោម:

ក. ករណី $Q(x)=(ax+b)(cx+d)(ex+f)...$

គេបាន $\frac{P(x)}{Q(x)}=\mathrm{A}(x)+\frac{\mathrm{A}_1}{ax+b}+\frac{\mathrm{A}_2}{cx+d}+...$ ដែល $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots$ ជាចំនួនថេរត្រូវកំណត់ ។

- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ស្មើដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $\mathrm{A}(x)$ ជាចំនួនថេរ
- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ តូចជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $\mathrm{A}(x)=0$
- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ធំជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $\mathrm{A}(x)$ ជាពហុធា

ខ. ករណី $Q(x)=(ax+b)^n$

គេបាន $\frac{P(x)}{Q(x)}=\mathrm{A}(x)+\frac{\mathrm{A}_1}{ax+b}+\frac{\mathrm{A}_2}{(cx+d)^2}+...+\frac{\mathrm{A}_n}{(ex+f)^n}$ ដែល $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_n$ ជាចំនួនថេរត្រូវកំណត់ ។

- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ស្មើដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $\mathrm{A}(x)$ ជាចំនួនថេរ
- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ តូចជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $\mathrm{A}(x)=0$
- បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ធំជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $\mathrm{A}(x)$ ជាពហុធា ។

លំហាត់

1. បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ ដែល:

ក. $F(x) = -7x + 4$ និង $f(x) = -7$ ខ. $F(x) = 3x^3 - 7x$ និង $f(x) = 9x^2 - 7$

គ. $F(x) = 3e^{x^2-1} - 7$ និង $f(x) = 6xe^{x^2-1}$ ឃ. $F(x) = \ln\left(e^{3x} - x\right) + \sqrt{11}$ និង $f(x) = \dfrac{3e^{3x} - 1}{e^{3x} - x}$

2. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ $f(x)$ កំណត់និង ជាប់លើចន្លោះ I ដោយ:

ក. $f(x) = 5 \;, I \in \mathbb{R}$ ខ. $f(x) = -4x + 3 \;, I \in \mathbb{R}$ គ. $f(x) = -x^2 + 3x + 5 \;, I \in \mathbb{R}$

ឃ. $f(x) = \dfrac{2}{x} \;, I = (0, +\infty)$ ង. $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}, I = \left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$ ច. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5} \;, I \in \mathbb{R}$

ឆ. $f(x) = e^{3x-2} \;, I \in \mathbb{R}$ ជ. $f(x) = xe^{x^2} \;, I \in \mathbb{R}$

3. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលកំណត់ដោយ:

ក. $f(x) = \dfrac{3}{\cos^2 x}$ និង $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ ខ. $f(x) = x^2 - x$ និង $F(0) = 1$

គ. $f(x) = x^2 - e^x$ និង $F(0) = 1$ ឃ. $f(x) = x^2 - xe^{x^2}$ និង $F(0) = 1$

4. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលកំណត់ដោយ:

ក. $f(x) = \sin x$ និង $F(0) = 3$ ខ. $f(x) = x - e^x$ និង $F(1) = 1 - e$

គ. $f(x) = \dfrac{x}{\left(x^2-4\right)^3}$ និង $F(5) = 3$ ឃ. $f(x) = \sin x \cos^3 x$ និង $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 16$

5. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $\int \left(2x^3 - 5x^2 + 3x + 1\right)dx$ ខ. $\int \left(5 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ គ. $\int 2\sqrt[4]{x}dx$

ឃ. $\int \left(\dfrac{3}{x^4} + \dfrac{1}{x^5}\right)dx$ ង. $\int \left(x^2 - 1\right)\sqrt{x}dx$ ច. $\int \left(2e^x + \dfrac{6}{x} - \ln 5\right)dx$

ឆ. $\int \dfrac{4x^4 - 3x^5 + 1}{x^4}dx$ ជ. $\int \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}}dx$ ឈ. $\int (3\sin x + 5\cos x)dx$

ញ. $\int \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{4}{\cos^2 x} - 5\right)dx$ ដ. $\int \dfrac{e^{3x} + 1}{e^x + 1}dx$ ឋ. $\int \left(1 - e^x\right)^2 dx$

ឌ. $\int \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$ ឍ. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$ ។

6. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $\int 3e^{3x}dx$ ខ. $\int 2xe^{x^2}dx$ គ. $\int 5e^{4-5x}dx$

ឃ. $\int (6x - 7)e^{3x^2-7x}dx$ ង. $\int \left(3x^2 - 2x + 1\right)e^{x^3-x^2+x}dx$ ច. $\int e^{\sin x}\cos xdx$

ឆ. $\int xe^{x^2}dx$ ជ. $\int 6x^2e^{x^3}dx$ ឈ. $\int (x+1)e^{x^2+2x}dx$

ញ. $\int \dfrac{2}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}dx$ ។

7. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $\int xe^{-x}dx$ ខ. $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$ គ. $\int (1-x)e^x dx$

ឃ. $\int(3-2x)e^{-x}dx$	ង. $\int x\ln 2xdx$	ច. $\int x\ln x^2dx$
ឆ. $\int xe^{\frac{-x}{5}}dx$	ជ. $\int xe^{0.1x}dx$	ឈ. $\int x\sqrt{x-6}dx$
ញ. $\int x\sqrt{1-x}dx$	ដ. $\int x(x+1)^8dx$	ឋ. $\int(x+1)(x+2)^6dx$
ឌ. $\int\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$	ឍ. $\int\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$	ណ. $\int x^2e^{-x}dx$
ត. $\int x^2e^{3x}dx$	ថ. $\int x^3e^xdx$	ទ. $\int x^3e^{2x}dx$
ធ. $\int x^2\ln xdx$	ន. $\int x(\ln x)^2dx$	ប. $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$ ។

8. តម្លៃរបស់រថយន្តមានការថយចុះជារៀងរាល់ឆ្នាំស្របនឹងអាយុកាលរបស់វា ។ បើអត្រាចុះកំណត់ដោយអនុគមន៍ $f'(t)=-100t(t+3)^{-3}$ (គិតជាម៉ឺនរៀល) ដែល t ជាអាយុកាលរបស់រថយន្តគិតជាឆ្នាំ ។ រកអនុគមន៍នៃតម្លៃរថយន្តក្នុងរយៈពេល t ឆ្នាំដោយដឹងថាតម្លៃតម្លៃរថយន្តទើបផលិតថ្មី $F(0)=1200$ (គិតជាម៉ឺនរៀល)។

9. តម្លៃដីនៅតាមកសិដ្ឋានមានការកើនឡើងជារៀងរាល់ឆ្នាំ ដែលអត្រាកំណើននៃតម្លៃដីក្នុងមួយហិចតាកំណត់ដោយអនុគមន៍ $v'=\frac{0.4x^3}{\sqrt{0.2x^4+8000}}$ (គិតជាម៉ឺនរៀល) ហើយ x ជាចំនួនឆ្នាំ។ បើគេដឹងថាតម្លៃដីពេលបច្ចុប្បន្ន 900 (គិតជាម៉ឺនរៀល) ក្នុងមួយហិចតា ។ រកអនុគមន៍នៃតម្លៃដីមួយហិចតានៅរយៈពេល 10 ឆ្នាំទៅមុខទៀត ។ អត្រាកំណើនប្រជាពលរដ្ឋក្នុងទីក្រុងមួយជាអនុគមន៍ $P'(t)=5+4t^{\frac{1}{3}}$ នាក់ក្នុងមួយខែ ដែល t ជាចំនួនខែ ។ បើគេដឹងថា ចំនួនប្រជាជនបច្ចុប្បន្នមាន $2\,000\,000$ នាក់។ រកអនុគមន៍នៃចំនួនប្រជាជននៅរយៈពេល 8 ឆ្នាំមុន។

លំហាត់ត្រិះរិះ

10. កំណត់តម្លៃ a,b,c ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ក្នុងករណីខាងក្រោម :

ក. $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$; $f(x)=(x-3)e^x$

ខ. $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{3-x}$; $f(x)=x\sqrt{3-x}$

គ. $F(x)=e^{x\sqrt{2}}(a\tan^2x+b\tan x+c)$; $f(x)=e^{x\sqrt{2}}\tan^3x$ លើចន្លោះ $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ។

11. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោមៈ

ក. $\int\left(6x^7-x^{-3}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$	ខ. $\int(x^3-2)^2dx$	គ. $\int\frac{x^4+2x^2-1}{x^2}dx$
ឃ. $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^3\sqrt{x}}dx$	ង. $\int x\left(x^3-\frac{e^x}{2x}\right)dx$	ច. $\int(x-\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)dx$
ឆ. $\int\left(x^2+3x-\frac{3}{x}\right)dx$	ជ. $\int\frac{4x^5+3x^4-12}{x^4}dx$	ឈ. $\int\frac{10}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}dx$
ញ. $\int\frac{x}{\sqrt{1+5x^2}}dx$	ដ. $\int x(1-x)^{20}dx$	ឋ. $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx$
ឌ. $\int\frac{x+4}{\sqrt{x-5}}dx$	ឍ. $\int x^2\sqrt{1-x}dx$	ណ. $\int x\sqrt{ax+b}dx$ ។

12. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោមៈ

ក. $\int \frac{2}{x}dx$ ខ. $\int \frac{4}{2x+1}dx$ គ. $\int \frac{6}{2-3x}dx$

ឃ. $\int \frac{1}{2(5x+1)}dx$ ង. $\int \frac{4}{5-3x}dx$ ច. $\int \frac{5}{e^x+4}dx$

ឆ. $\int \frac{7}{6-5x}dx$ ជ. $\int \frac{3}{4x+5}dx$ ឈ. $\int \frac{2020}{2021x-3}dx$ ។

13. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int e^{2x}dx$ ខ. $\int e^{-4x}dx$ គ. $\int 6e^{3x}dx$

ឃ. $\int 4e^{\frac{1}{2}x}dx$ ង. $\int 6e^{2-3x}dx$ ច. $\int 2e^{8x-5}dx$

ឆ. $\int \cos xe^{-2\sin x+3}dx$ ជ. $\int \frac{1}{x}e^{\ln x-2}dx$ ឈ. $\int \sin 2xe^{\sin^2 x+1}dx$

ញ. $\int \left(2e^x-\frac{5}{e^x}\right)^2 dx$ ដ. $\int \frac{\left(e^x+1\right)^2}{e^{2x}}dx$ ឋ. $\int \frac{e^{\tan x}}{2\cos^2 x}dx$ ។

14. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \sin 3xdx$ ខ. $\int \cos 5xdx$ គ. $\int \sin \frac{x}{3}dx$

ឃ. $\int 2\sin(3x-1)dx$ ង. $\int 2\cos\left(\frac{1}{2}x-1\right)dx$ ច. $\int \sec^2 2xdx$

ឆ. $\int 2\cos(2-3x)dx$ ជ. $\int 2\sec^2(5x-1)dx$ ឈ. $\int (2x-1)\sin\left(x^2-x+3\right)dx$

ញ. $\int (4x-6)\cos\left(x^2-3x+1\right)dx$ ដ. $\int \frac{2}{3}\sin(-\ln x+2)dx$ ឋ. $\int \sin 2x\cos\left(2\cos^2 x+1\right)dx$

15. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int 3\cos^2 xdx$ ខ. $\int 4\cos^2 \frac{x}{2}dx$ គ. $\int \sin^2 4xdx$

ឃ. $\int 2\sin^2 3xdx$ ង. $\int 6\tan^2 3xdx$ ច. $\int \cos^4 xdx$

ឆ. $\int (\cos x-2\sin x)^2 dx$ ជ. $\int \left(\cos^2 x+\sin 2x\right)dx$ ឈ. $\int (2\sin x+\cos x)^2 dx$

ញ. $\int \frac{1+\cos^4 x}{\cos^2 x}dx$ ដ. $\int \frac{5}{1+\cos 4x}dx$ ឋ. $\int \sin 2x\cos\left(2\cos^2 x+1\right)dx$

16. គេឱ្យ $f(x)=\frac{3x^2+4}{\left(x^2-4\right)^2}$ ដែល $x\neq \pm 2$ ។

ក) កំណត់តម្លៃ a,b ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{a}{(x-2)^3}+\frac{b}{(x-2)^3}$ ។

ខ) ទាញរក $\int f(x)dx$ ។

17. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1-9x-8x^2}{(x-2)(2x+3)^2}$ ដែល $x\neq \left\{2,-\frac{3}{2}\right\}$ ។

ក) កំណត់តម្លៃ A,B និង C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{\mathrm{A}}{(x-2)}+\frac{B}{(2x+3)}+\frac{C}{(2x+3)^2}$ ។

ខ) ទាញរក $\int f(x)dx$ ។

18. សរសេរ $\frac{6x-2}{(x-2)(x+3)}$ ជាទម្រង់ប្រភាគដោយផ្នែក រួចទាញរក $\int\frac{6x-2}{(x-2)(x+3)}dx$ ។

19. សរសេរ $\frac{2x-11}{(x-4)^2}$ ជាទម្រង់ប្រភាគដោយផ្នែក រួចទាញរក $\int\frac{2x-11}{(x-4)^2}dx$ ។

20. សរសេរ $\frac{11x^2+14x+5}{(2x+1)(x+1)^2}$ ជាទម្រង់ប្រភាគដោយផ្នែក រួចទាញរក $\int\frac{11x^2+14x+5}{(2x+1)(x+1)^2}dx$ ។

21. សរសេរ $\frac{11x+12}{(2x+3)(x+2)(x-3)}$ ជាទម្រង់ប្រភាគដោយផ្នែក រួចទាញរក $\int\frac{11x+12}{(2x+3)(x+2)(x-3)}dx$ ។

22. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int\frac{1}{x(3-x)}dx$ ខ. $\int\frac{3}{(x+1)(x-2)}dx$ គ. $\int\frac{4}{(2x+1)(2x-3)}dx$

ឃ. $\int\frac{2x-5}{(x+2)(x-3)}dx$ ង. $\int\frac{2(4x-9)}{(2x+1)(x-5)}dx$ ច. $\int\frac{3-x}{(x+1)(x^2+3)}dx$

ឆ. $\int\frac{9-4x}{(2x+3)(x-1)^2}dx$ ជ. $\int\frac{5x+14}{6x^2+5x-4}dx$ ឈ. $\int\frac{9}{(x+2)(x-1)^2}dx$

ញ. $\int\frac{1-x-2x^2}{x^2(x-1)}dx$ ដ. $\int\frac{1-2x}{(2x+1)(x+1)^2}dx$ ឋ. $\int\frac{8x^2-3x-2}{4x^3-3x+1}dx$ ។

23. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$ ដែល $x\neq\{0,1\}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ $A,B\&C$ ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$ ។

ខ. ទាញរក $\int f(x)dx$ ។

24. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{(3x+4)e^x-3x}{4(1-e^x)}$ ដែល $x\neq\{0,1\}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ $\alpha,\beta\&\gamma$ ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma e^x}{1-e^x}$ ។

ខ. ទាញរក $\int f(x)dx$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

25. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int(5x^2-2e^{7x})dx$ ខ. $\int(2x^5-4e^{3x})dx$ គ. $\int\left(x^2-\frac{3}{2}\sqrt{x}+x^{-\frac{4}{3}}\right)dx$

ឃ. $\int\left(x^4+\frac{1}{8\sqrt{x}}-\frac{4}{5}x^{-\frac{2}{3}}\right)dx$ ង. $\int(3x+2)^2dx$ ច. $\int(x+4)^{10}dx$

ឆ. $\int\left(\frac{3}{x}-5e^{2x}+\sqrt{x^7}\right)dx$ ជ. $\int\left(\frac{7}{\sqrt{x}}-\frac{2}{3}e^{5x}-\frac{8}{x}\right)dx$ ឈ. $\int\left(\frac{4}{\sqrt[5]{x}}+\frac{3}{4}e^{6x}-\frac{7}{x}\right)dx$ ។

26. គណនាអនុគមន៍ f ក្នុងករណីខាងក្រោម:

ក. $f'(x)=x-3$, $f(2)=9$ ខ. $f'(x)=x-5$, $f(1)=6$ គ. $f'(x)=x^2-4$, $f(0)=7$

ឃ. $f'(x)=x^2+1$, $f(0)=8$ ង. $f'(x)=5x^2+3x-7$, $f(0)=9$ ច. $f'(x)=8x^2+4x-2$, $f(0)=6$

ឆ. $f'(x)=5e^{2x}$, $f(0)=\frac{1}{2}$ ជ. $f'(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}+2x$, $f(1)=-5$ ឈ. $f'(x)=x^2-4$, $f(0)=7$ ។

27. កំណត់ចម្ងាយចរ $s(t)$ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក. $v(t)=3t^2,\ s(0)=4$ ខ. $v(t)=2t,\ s(0)=10$ គ. $v(t)=t^2+4,\ v(0)=5$

28. កំណត់ចម្ងាយចរ $s(t)$ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក. $a(t)=-2t+6,\ v(0)=6\ \&\ s(0)=10$ ខ. $a(t)=-6t+7,\ v(0)=10\ \&\ s(0)=20$

29. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

១. $\int (8x+x^3)3x^2dx$ ២. $\int (x^2-7)^6 2xdx$ ៣. $\int (x^2-6)^7 xdx$

៤. $\int (x^3+1)^4 x^2dx$ ៥. $\int (3t^4+2)t^3dt$ ៦. $\int (2t-3)^{10} t^4dt$

៧. $\int \frac{2}{1-2t}dt$ ៨. $\int \frac{5}{5x+7}dx$ ៩. $\int (\ln x)^3\left(\frac{1}{x}\right)dx$

១០. $\int (\ln x)^7\left(\frac{1}{x}\right)dx$ ១១. $\int e^{\frac{x}{3}}dx$ ១២. $\int x^4e^{x^5}dx$

១៣. $\int te^{-t^2}dt$ ១៤. $\int t^2e^{-t^3}dt$ ១៥. $\int \frac{e^x}{e^x+4}dx$

១៦. $\int \frac{e^x}{3-e^x}dx$ ១៧. $\int \frac{\ln x^2}{x}dx$ ១៨. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

១៩. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ ២០. $\int \frac{1}{x\ln x^2}dx$ ២១. $\int \frac{\ln^2 x+2\ln x+4}{x}dx$

២២. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ ២៣. $\int x\sqrt{ax+b}dx$ ២៤. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$

២៥. $\int \frac{x^3}{(2-x^4)^7}dx$ ២៦. $\int \frac{3x^2}{(1+x^3)^5}dx$ ២៧. $\int \frac{t^3\ln(t^4+8)}{t^4+8}dt$

២៨. $\int \frac{t^2+2t}{(t+1)^2}dt$ ២៩. $\int \frac{dx}{e^x+2}$ ៣០. $\int \frac{e^{\frac{2}{t}}}{t^2}dt$ ។

30. គណនាដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ឬអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួស៖

១. $\int 4xe^{4x}dx$ ២. $\int (2x+1)e^{3x}dx$ ៣. $\int x^3(3x^2)dx$

៤. $\int x^2(2x)dx$ ៥. $\int xe^{5x+1}dx$ ៦. $\int (2x-3)e^{4x}dx$

៧. $\int xe^{-2x}dx$ ៨. $\int 2x\sin 3xdx$ ៩. $\int 4x\cos 5xdx$

១០. $\int x^2\ln(x+1)dx$ ១១. $\int x^3\ln xdx$ ១២. $\int x\ln\sqrt{x}dx$

១៣. $\int \ln(t+5)dt$ ១៤. $\int \ln(x+4)dx$ ១៥. $\int (x+2)\ln xdx$

១៦. $\int (x+1)\ln xdx$ ១៧. $\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$ ១៨. $\int x\sqrt{x+2}dx$

១៩. $\int x\sqrt{x+5}dx$ ២០. $\int x^3\ln 2xdx$ ២១. $\int x^{-5}\ln xdx$

២២. $\int x^2e^xdx$ ២៣. $\int \ln^2 xdx$ ២៤. $\int x^3e^{-2x}dx$

២៥. $\int (x^4+4)e^{3x}dx$ ២៦. $\int (x^3-x+1)e^{-x}dx$ ២៧. $\int x^2\sin 2xdx$

២៨. $\int (x^2-2)\cos xdx$ ២៩. $\int e^{2x}\sin 2xdx$ ៣០. $\int e^{3x}\cos 4xdx$ ។

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូ១

កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃ..........ខែ..........ឆ្នាំ........ឯកស័ក ព.ស ២៥៦៤
ត្រូវនឹងថ្ងៃទី.........ខែ..........ឆ្នាំ២០២០

មុខវិជ្ជា ៖ **គណិតវិទ្យា**

ថ្នាក់ទី ៖ 9

មេរៀនទី៥ **វិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត**

៤. ចំណោទ

រយៈពេល ៖ **៥០នាទី**

I. **វត្ថុបំណង** ៖ ក្រោយពិបានសិក្សាមេរៀននេះចប់ សិក្ខាកាមនឹងទទួលបាន

១. វិជ្ជាសម្បទា

- រៀបរាប់ពីជំហានទាំង៤នៃយុទ្ធវិធីដោះស្រាយចំណោទបញ្ហារបស់លោក Polya ក្នុងការដោះស្រាយចំណោទសមីការដឺក្រេទី១ បានយ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។

២. បំណិនសម្បទា

- ប្រើប្រាស់វិធីដោះស្រាយសមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី១ ដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់ដែលទាក់ទងនឹងការអនុវត្តគណិតវិទ្យាក្នុងជីវភាពរស់នៅបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវ តាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។

៣. ចរិយាសម្បទា

- មានទម្លាប់ក្នុងការសិក្សាជាក្រុមបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមរយៈការសម្របសម្រួលរបស់គ្រូឧទ្ទេស។

II. **សម្ភារឧបទេស**

- កម្រងសំណួរ ក្តារខៀន ហ្វឺត បន្ទាត់

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** ការបង្រៀនតាមបែបដោះស្រាយបញ្ហា

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	**ខ្លឹមសារ**	**សកម្មភាពសិស្ស**
ជំហានទី១៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់ (**៣ នាទី**)		
គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន សណ្តាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យ		ប្រធានថ្នាក់ឡើងប្រាប់គ្រូពីវត្តមាន
ជំហានទី២៖ រំលឹកមេរៀន (**៧ នាទី**)		
• ឱ្យសិស្សដោះស្រាយលំហាត់តាមក្រុម	ដោះស្រាយសមីការ ក. $3x+2=\frac{1}{2}x-5$ ខ. $\frac{1}{3}x-5<\frac{1}{2}x-\frac{3}{10}$	តំណាងក្រុមឡើងបង្ហាញដំណោះស្រាយលើក្តារខៀន ក. $3x+2=\frac{1}{2}x-5,\ x=-\frac{14}{5}$ ខ. $\frac{1}{3}x-5<\frac{1}{2}x-\frac{3}{10},\ x>-\frac{141}{5}$

ជំហានទី៣៖ មេរៀនថ្មី (៣០ នាទី)		
បែងចែកសិស្សជាក្រុមឱ្យអានប្រធានលំហាត់ដើម្បីកំណត់៖ **១. យល់បញ្ហា** - ចូរប្អូនព្យាយាមស្រង់ពាក្យគន្លឹះ និងបម្រាប់ទាំងអស់ក្នុងចំណោទ **២. ការបង្កើតផែនការ** - ចូរប្អូនជ្រើសរើសអថេរ	**ការអនុវត្តន៍សមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី១** **លំហាត់:** ក្រុមហ៊ុនអគ្គីសនីមួយមានផែនការទីផ្សារសម្រាប់លក់ម៉ាស៊ីនគិតលេខទំនើបមួយ។ គេដឹងថាតម្លៃថេរសម្រាប់ផលិតម៉ាស៊ីនគិតលេខនេះ មានតម្លៃ $650,000 និងតម្លៃប្រែប្រួលថ្លៃ $47 ក្នុងមួយគ្រឿង។ ក្រុមហ៊ុនបានកំណត់តម្លៃលក់ដុំថ្លៃ $63។ សម្រាប់ក្រុមហ៊ុនអាចទទួលបានប្រាក់ចំណេញលុះត្រាតែប្រាក់ចំណូលធំជាងប្រាក់ចំណាយ។ ក. តើក្រុមហ៊ុនត្រូវលក់ម៉ាស៊ីនគិតលេខចំនួនប៉ុន្មានដើម្បីរួចដើម? ខ. តើក្រុមហ៊ុនត្រូវលក់ម៉ាស៊ីនគិតលេខចំនួនប៉ុន្មានដើម្បីបានប្រាក់ចំណេញ? ប្រើប្រាស់ជំហានទាំង៤នៃយុទ្ធវិធីដោះស្រាយចំណោទបញ្ហារបស់ Polya **១. យល់បញ្ហា** (ស្រង់ពាក្យគន្លឹះ និង បម្រាប់) - ប្រាក់ចំណាយថេរ ចំណាយប្រែប្រួល ប្រាក់ចំណូល និងប្រាក់ចំណេញ - ប្រាក់ចំណេញលុះត្រាតែប្រាក់ចំណូលធំជាងប្រាក់ចំណាយ **២. ការបង្កើតផែនការ** - ប្រាក់ចំណាយ និងប្រាក់ចំណូល	សិស្សព្យាយាមអានប្រធានលំហាត់ជាក្រុម **១. យល់បញ្ហា** - ប្រាក់ចំណាយថេរ និងចំណាយប្រែប្រួលដើម្បីផលិតម៉ាស៊ីន - ប្រាក់ចំណូលពេលលក់ម៉ាស៊ីន - ប្រាក់ចំណេញ - តម្លៃថេរសម្រាប់ផលិតម៉ាស៊ីនគិតលេខមានតម្លៃ $650,000 - តម្លៃប្រែប្រួលថ្លៃ $47 ក្នុងមួយគ្រឿង - តម្លៃលក់ដុំថ្លៃ $47 - ក្រុមហ៊ុនអាចទទួលបានប្រាក់ចំណេញលុះត្រាតែចំណូលធំជាងប្រាក់ចំណាយ - រួចដើម - ប្រាក់ចំណេញ - រកចំនួនម៉ាស៊ីនគិតលេខដែលត្រូវផលិតដើម្បីឱ្យក្រុមហ៊ុនរួចដើម - រកចំនួនម៉ាស៊ីនគិតលេខដែលត្រូវផលិតដើម្បីឱ្យក្រុមហ៊ុនចំណេញ **២. ការបង្កើតផែនការ** - ត្រូវតាង x ជាចំនួនម៉ាស៊ីនគិតលេខ - ប្រាក់ចំណាយសរុប $C(x)$ ស្មើនឹងប្រាក់ចំណាយថេរបូកនឹងប្រាក់ចំណាយប្រែប្រួលសរុប៖ $C(x)=650000+47x$ - ប្រាក់ចំណូលសរុប $R(x)$ ស្មើនឹងតម្លៃលក់ចេញគុណនឹងចំនួនម៉ាស៊ីនគិតលេខដែលបានលក់៖ $R(x)=63x$

• ចូរប្អូនសរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយសរុប • ចូរប្អូនសរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុប	$C(x)=650000+47x$ និង $R(x)=63x$ រៀងគ្នា • ក្រុមហ៊ុនរួចដើមលុះត្រាតែ $R(x)=C(x)$ • ប្រាក់ចំណេញលុះត្រាតែ $R(x)>C(x)$	
-ចូរប្អូនសរសេរលក្ខខណ្ឌទាំងអស់ក្នុងចំណោទ **៣.អនុវត្តផែនការ** -ចូរប្អូនដោះស្រាយសមីការ $R(x)=C(x)$ -ចូរប្អូនដោះស្រាយសមីការ $R(x)=C(x)$ **៤. ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ** -ចូរប្អូនពិនិត្យមើល ករណីគេលក់បាន ម៉ាស៊ីនគិតលេខបាន ចំនួន40625គ្រឿង	**៣. អនុវត្តផែនការ** -ដោះស្រាយសមីការ $R(x)=C(x)$ -ដោះស្រាយវិសមីការ $R(x)=C(x)$ **៤. ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ** -ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $R(x)=C(x)$ ពេល $x=40625$ -ផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ $R(x)=C(x)$ ពេល $x=40625$	-ក្រុមហ៊ុនរួចដើមលុះត្រាតចំណូលស្មើប្រាក់ចំណាយ $R(x)=C(x)$ -ប្រាក់ចំណេញលុះត្រាតែប្រាក់ចំណូច្រើនជាងប្រាក់ចំណាយ $R(x)=C(x)$ **៣. អនុវត្តផែនការ** ក. ក្រុមហ៊ុនរួចថ្លៃដើមលុះត្រាតែ $R(x)=C(x)$ $63x=650000+47x$ $16x=650000$ $x=40625$ ដូច្នេះក្រុមហ៊ុនអាចចូលរួចដើមលុះត្រាតែក្រុមហ៊ុនអាចលក់ម៉ាស៊ីនគិតលេខបានចំនួន40625គ្រឿង។ **៤. ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ** ក. យកតម្លៃ $x=40625$ ក្នុងអនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយ $C(x)=650000+47x$ $=650000+47x$ $=650000+47\times 40625$ យកតម្លៃ $x=40625$ ជំនួសក្នុងអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូល $R(x)=63x$ $=63\times 40625$ $=2559375$ ដូច្នេះប្រាក់ចំណូលស្មើប្រាក់ចំណាយពិត ខ. យក $x=40625$ ជំនួសក្នុងអនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយ $C(x)=650000+47x$ $=650000+47\times 40625$ $=2559422$

-ចូរប្អូនពិនិត្យមើលករណីគេលក់បានម៉ាស៊ីនគិតលេខបាន ចំនួន 40625គ្រឿង		យក $x = 40625$ ជំនួសក្នុងអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូល $R(x) = 63x$ $= 63 \times 40626$ $= 2559438$ ដូច្នេះប្រាក់ចំណូលច្រើនជាងប្រាក់ចំណាយពិត(ក្រុមហ៊ុនចំនេញប្រាក់ជាង16$)
ជំហានទី៤៖ ពង្រឹងចំណេះដឹង (៥នាទី)		
ចូរប្អូនរៀបរាបនូវជំហានប៉ូលៀ(Polya)ត្រូវប្រើដើម្បីដោះស្រាយចំណោទគណិតវិទ្យា	**របៀបនៃការដោះស្រាយលំហាត់អនុវត្តគណិតវិទ្យា**	**ជំហានទី១ (យល់បញ្ហា)** អានប្រធានលំហាត់មួយឃ្លាម្ដងៗដោយប្រុងប្រយ័ត្នដើម្បីយលបញ្ហាដែលមានក្នុងចំណោទ ដើម្បីកំណត់ឱ្យបាននូវលក្ខខណ្ឌទាំងអស់ដែលគេឱ្យ និងអ្វីដែលគេសួរ។ **ជំហានទី២ (បង្កើតផែនការ)** តាំងអថេរតាមសំណួរដែលគេសួរ។ កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាងលក្ខខណ្ឌដែលគេស្គាល់ និងមិនស្គាល់។ រិះគិតរកយុទ្ធវិធីផ្សេងៗដើម្បីភ្ជាប់ទំនាក់ទំនងដែលយើងកំណត់បាន។ **ជំហានទី៣(អនុវត្តន៍ផែនការ)** ប្រើប្រាស់យុទ្ធវិធី និងទំនាក់ទំនងផ្សេងៗដែលកំណត់បានដើម្បីដោះស្រាយចំណោទបញ្ហា។ **ជំហានទី៤(ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ)** ត្រួតពិនិត្យឡើងមើលវិញថាតើដំណោះស្រាយបញ្ហាបានប្រើប្រាស់គ្រប់លក្ខខណ្ឌឬទេ? ផ្ទៀងផ្ទាត់មើលថាតើក្នុងដំណោះស្រាយមានកំហុសណាមួយកើតឡើងឬទេ? បើក្នុងជំហានទី២ យើងរកឃើញនូវយុទ្ធវិធីផ្សេងៗសម្រាប់ដោះស្រាយបញ្ហាគេគួប្រើប្រាស់យុទ្ធវិធីផ្សេងទាំង

		នេះដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់តាមរបៀបផ្សេង។
ជំហានទី៥៖ កិច្ចការផ្ទះ និងបណ្តាំផ្ញើ (**៥នាទី**)		
-ចូរប្អូនៗដោះស្រាយលំហាត់ដូចខាងក្រោម	លំហាត់៖ ក្រុមហ៊ុនផលិតវីដេអូហ្គេមមួយធ្វើផែនការទីផ្សារសម្រាប់លក់ម៉ាស៊ីនហ្គេមទំនើបមួយ។ គេដឹងថាតម្លៃថេរសម្រាប់ ផលិតម៉ាស៊ីនហ្គេម នេះមានតម្លៃ $550000និង តម្លៃប្រែប្រួល ថ្លៃ $120 ក្នុងមួយគ្រឿង។ ក្រុមហ៊ុនបានកំណត់តម្លៃលក់ដុំថ្លៃ $140។ សម្រាប់ក្រុមហ៊ុនអាចទទួលបានប្រាក់ចំណេញលុះត្រាតែប្រាក់ចំណូលធំជាងប្រាក់ចំណាយ ក. ក្រុមហ៊ុនត្រូវលក់ម៉ាស៊ីមហ្គេមថ្លៃប៉ុន្មានដើម្បីរួចដើម។ ខ. តើក្រុមហ៊ុនត្រូវលក់ម៉ាស៊ីនគិតលេខថ្លៃប៉ុន្មាន?	សិស្សត្រង់ត្រាប់ស្តាប់គ្រូ និងកត់លំហាត់ដោះស្រាយ រួចជំរាបលាលោកគ្រូទៅផ្ទះ។

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី២

កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃ.............ខែ........ឆ្នាំ.......ឯកស័ក ព.ស ២៥៦...
ត្រូវនឹងថ្ងៃ ទី.......ខែ......ឆ្នាំ ២០.....

មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៖ ១២

ជំពូកទី៧ ៖ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

មេរៀនទី២ ៖ អនុវត្តន៍នៃផលគុណវ៉ិចទ័រ
២. សមីការស្វ៊ែក្នុងលំហ

រយៈពេល ៖ ៥០នាទី

I. **វត្ថុបំណង**៖ ក្រោយពីសិក្សាមេរៀននេះចប់ សិក្ខាកាមនិងទទួលបាន៖

១.វិជ្ជាសម្បទា៖ រៀបរាប់ពីជំហានទាំង៤នៃយុទ្ធវិធីដោះស្រាយចំណោទបញ្ហារបស់លោក Polya ក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់លើការរកសមីការស្វ៊ែក្នុងលំហបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។

២.បំណិនសម្បទា៖ ប្រើប្រាស់វិធីដោះស្រាយលំហាត់ស្រដៀងគ្នា ប៉ុន្តែងាយជាងក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់អនុវត្តលើសមីការស្វ៊ែក្នុងលំហបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។

៣.ចរិយាសម្បទា៖ បណ្តុះទម្លាប់សិក្សាជាក្រុមបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមរយៈការសម្រេបសម្រួលរបស់គ្រូឧទ្ទេស។

II. **សម្ភារឧបទេស**

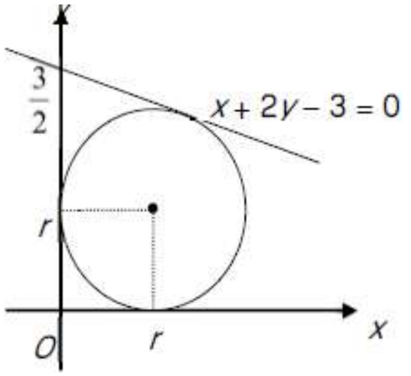
-កម្រងសំណួរ ក្តាខៀន ហ្វឺត បន្ទាត់

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន**៖ វិធីបង្រៀនតាមបែបដោះស្រាយបញ្ហា

IV. **ដំណើរការបបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារ	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ ៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់ (៣នាទី)		
គ្រូពិនិត្យអវត្តមានសណ្តាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យ		ប្រធានថ្នាក់ឡើងប្រាប់គ្រូពីវត្តមាន
ជំហានទី២ ៖ រំលឹកមេរៀន (៧នាទី)		
១.ឱ្យសិស្សឱ្យទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការស្វ៊ែក្នុងលំហ។ ២.ឱ្យសិស្សរៀបរាប់ពីធាតុសំខានៗក្នុងការសរសេរសមីការស្វ៊ែ។	១.សមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត $I(a,b,c)$ និងកាំ r កំណត់ដោយ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ២. ធាតុសំខាន់ៗក្នុងការសរសេរសមីការស្វ៊ែក្នុងលំហមានកូអរដោនេផ្ចិត និងកាំនៃស្វ៊ែ។	ឱ្យតំណាងសិស្សឡើងឆ្លើយសំណួរ ១.សមីការស្វ៊ែក្នុងលំហ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ២.ធាតុសំខាន់ៗមាន៖ កូអរដោនេផ្ចិត $I(a,b,c)$ និងកាំនៃស្វ៊ែ r ។

ជំពូកទី៣ ៖ មេរៀនថ្មី (៣០នាទី)		
ប្រាប់សិស្សថាយើងនិងដោះស្រាយលំហាត់ទាក់ទងនិងសមីការស្វ៊ែ បែងចែកសិស្សជាក្រុមឱ្យអានប្រធានលំហាត់ដើម្បីកំណត់៖	**ការអនុវត្តន៍ក្នុងការដោះស្រាយរកសមីការស្វ៊ែក្នុងលំហ** **លំហាត់៖** ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ នៃលំហ $\mathbb{R}^3$ គេមានស្វ៊ែ S ដែលផ្ចិតរបស់វាមានកូអរដោនេវិជ្ជមាន ប៉ះប្លង់ xy,xz,yz និងប្លង់ $P:x+2y-2z-3=0$ ។ចូររកសមីការស្វ៊ែនេះ។	 សិស្សព្យាយាមអានប្រធានលំហាត់ជាក្រុម
១.យល់បញ្ហា -ចូរប្អូនព្យាយាមស្រង់ពាក្យគន្លឹះ និងសំណួរ	**១.យល់បញ្ហា** (ស្រង់ពាក្យគន្លឹះ និងបម្រាប់សំណួរ)	**១.យល់បញ្ហា៖** **ស្រង់ពាក្យគន្លឹះ៖**តម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ កូអរដោនេផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែ សមីការប្លង់ និងសមីការស្វ៊ែ។ផ្ចិតនៃស្វ៊ែមានកូអរដោនេវិជ្ជមាន។ **បម្រាប់៖** ស្វ៊ែស្ថិតក្នុងលំហ $\mathbb{R}^3$ ប៉ះប្លង់ xy,xz,yz និងប៉ះប្លង់ $P:x+2y-2z-3=0$ -(a,b,c) ជាផ្ចិតនៃស្វ៊ែមានកូអរដោនេវិជ្ជាមាន។ **សំណួរ៖**សរសេរសមីការស្វ៊ែ។
២.ការបង្កើតផែនការ -ចូរប្អូនវិភាគពីរលក្ខខណ្ឌស្គាល់ និងសំណួរដែរគេសួរ។ រួចរកយុទ្ធវិធីដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់។	**២.ការបង្កើតផែនការ** -វិភាគលក្ខខណ្ឌស្គាល់ និងសំណួរ រួចរកយុទ្ធវិធីដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់។ -សិស្សប្រើប្រាស់យុទ្ធវិធីលំហាត់ស្រដៀងគ្នា ប៉ុន្តែងាយជាង។ -សិស្សប្រើប្រាស់យុទ្ធវិធីដ្យាក្រាមមកជំនួយនិងប្រើរូបមន្តចម្ងាយរវាងពីរចំណុច។	**២.ការបង្កើតផែនការ** -ដោយស្វ៊ែស្ថិតក្នុងលំហប៉ះប្លង់ xy,xz,yz និងប្លង់ $P:x+2y-2z-3=0$ មានលក្ខណៈដូចទៅនិងសមីការរង្វង់ប៉ះនឹងអក្ស x និង y រួចប៉ះនិងបន្ទាត់ $P:x+2y-2z-3=0$ -ពួកគេត្រូវគិតពីរង្វង់ដែលមានផ្ចិត I កាំ r ប៉ះប្លង់ P នោះគេបាន $d(I,P)=r$

		ដែលមានសមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ -តាមក្រាបគេសង្កេតឃើញថា $a=b=r$ ព្រោះរង្វង់ប៉ះអក្សអាប់ស៊ីស និងអក្សអរដោនេ។ -ចម្ងាយពីចំណុច $M(x_0,y_0)$ ទៅបន្ទាត់ $L:ax+by+c=0$ ក្នុងប្លង់គឺ $d(M,L)=\frac{\lvert ax_0+by_0+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ -បើdជាចម្ងាយពីផ្ចិតនៃរង្វង់ទៅបន្ទាត់L នោះ $d=r$ ។
៣.ការអនុវត្តផែនការ -ចូរប្អូនយកលំនាំនៃវិធីដោះស្រាយខាងលើនេះមកអនុវត្តក្នុងការកំណត់សមីការស្វ៊ែ S ខាងលើ។	**៣.ការអនុវត្តផែនការ** -តាង $I(a,b,c)$ ជាកូអរដោនេផ្ចិត និង r ជាកាំនៃស្វ៊ែ S ស្វ៊ែ S ប៉ះប្លង់ $P:x+2y-2z-3=0$ នោះគេបាន $\begin{cases}a=b=c=r\\ d(I,P)=r\end{cases}$ គេបាន $d(I,P)=r\Leftrightarrow\frac{\lvert r+2r-2r-3\rvert}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=r$ $\Leftrightarrow\lvert r-3\rvert=3r$ $\Rightarrow r-3=\pm3r$ $\Rightarrow r=-\frac{3}{2}$ ឬ $r=\frac{3}{2}$ ដោយ $r>0$ នោះ $r=\frac{3}{4}$ ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែ S មានរាង $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$	**៣.ការអនុវត្តផែនការ** ស្វ៊ែ S ប៉ះប្លង់ xy,xz,zy និងប្លង់ $P:x+2y-2z-3=0$ នោះគេបាន $\begin{cases}a=b=c=r\\ d(I,P)=r\end{cases}$ គេបាន $d(I,P)=r\Leftrightarrow\frac{\lvert r+2r-2r-3\rvert}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=r$ $\Leftrightarrow\lvert r-3\rvert=3r$ $\Rightarrow r-3=\pm3r$ $\Rightarrow r=-\frac{3}{2}$ ឬ $r=\frac{3}{2}$ ដោយ $r>0$ នោះ $r=\frac{3}{4}$ ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែ S មានរាង $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2$ ៤. $=\frac{9}{16}$
-ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ -ចូរប្អូនគណនាចម្ងាយពីផ្ចិត $I\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$ ទៅប្លង់ $P:x+2y-2z-3=0$	**៤.ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ** -ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $d(I,P)=r$	**ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ** $d(I,P)=\frac{\left\lvert\frac{3}{4}+2\left(\frac{3}{4}\right)-2\left(\frac{3}{4}\right)-3\right\rvert}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$ $=\frac{9}{4\times3}=\frac{3}{4}$

		ដូចនេះ $d(I,P)=r$ ។
ជំហានទី៤ ៖ ពង្រឹងចំណេះដឹង (**៥នាទី**)		
ចូរប្អូនរៀបរាប់នូវជំហានប៉ូលៀ(Polya)ត្រូវប្រើដើម្បីដោះស្រាយចំណោទគណិតវិទ្យា	**របៀបនៃការដោះស្រាយលំហាត់អនុវត្តគណិតវិទ្យា**	-**ជំហានទី១(យល់បញ្ហា)៖**អានប្រធានលំហាត់មួយឃ្លាម្តងៗដោយប្រុងប្រយ័ត្នដើម្បីយល់បញ្ហាក្នុងចំណោទ ដើម្បីកំណត់ឱ្យបាននូវលក្ខខណ្ឌទាំងអស់គេឱ្យ និងអ្វីដែលគេសួរ។ **ជំហានទី២(អនុវត្តន៍ផែនការ)៖**ប្រើប្រាស់យុទ្ធវិធី និងទំនាក់ទំនងផ្សេងៗដែលកំណត់បានដើម្បីដោះស្រាយចំណោទបញ្ហា។ **ជំហានទី៤(ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ)៖**ត្រួតពិនិត្យមើលឡើងវិញថាតើដំណោះស្រាយ បញ្ហាបានប្រើប្រាស់គ្រប់លក្ខខណ្ឌ ឬទេ? ផ្ទៀងផ្ទាត់មើលថាតើក្នុងដំណោះស្រាយមានកំហុសណាមួយកើតឡើងឬទេ? បើក្នុងជំហានទី២ យើងរកឃើញនូវយុទ្ធវិធីផ្សេងៗសម្រាប់ដោះស្រាយបញ្ហាគេគួប្រើប្រាស់យុទ្ធវិធីផ្សេងៗទាំងនេះ ដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់តាមរបៀបផ្សេង។
ជំហានទី៥៖ កិច្ចការផ្ទះ និងបណ្តាំផ្ញើ (**៥នាទី**)		
ចូរប្អូនដោះស្រាយលំហាត់ដូចខាងក្រោម	លំហាត់: ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ នៃលំហ $\mathbb{R}^3$ គេមានស្វ៊ែ S ឱ្យដោយសមីការ $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ និងបន្ទាត់ $L:\frac{x}{2}=y=-\frac{z}{2}$ ។ តើបន្ទាត់ Lកាត់ស្វ៊ែ S ដែរឬទេ?	សិស្សត្រង់ត្រាប់ស្តាប់គ្រូ និងកត់លំហាត់ដោះស្រាយរួចជំរាបលាលោកគ្រូទៅផ្ទះ។

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី៣

កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃ.............ខែ........ឆ្នាំ.......ឯកស័ក ព.ស ២៥៦...
ត្រូវនិងថ្ងៃ ទី.......ខែ......ឆ្នាំ ២០.....

មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៖ ១០

ជំពូកទី៣ ៖ សមីការ និងវិសមីការ

មេរៀនទី២ ៖ ប្រពន្ធសមីការនិងសមីការដឺក្រេលំដាប់ខ្ពស់
២.៤. ទ្រឹស្តីបទសំណល់ និងទ្រឹស្តីបទផលគុណកត្តា (លំហាត់)

រយៈពេល ៖ ៥០នាទី

I. **វត្ថុបំណង៖** ក្រោយពីសិក្សាមេរៀននេះចប់ សិក្ខាកាមនឹងទទួលបាន៖

១.វិជ្ជាសម្បទា៖ សិស្សពន្យល់បានពីរបៀបរកសំណល់នៃពហុធាបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមរយៈក្រុមពិភាក្សា។

២.បំណិនសម្បទា៖ សិស្សរកសំណល់ពហុធាដោយប្រើទ្រឹស្តីបទសំណល់បានយ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមរយៈការសម្របសម្រួលគ្រូ។

៣.ចរិយាសម្បទា៖ បណ្តុះទម្លាប់សិក្សាជាក្រុមបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមរយៈការសម្របសម្រួលរបស់គ្រូឧទ្ទេស។

II. **សម្ភារឧបទេស**

-កម្រងសំណួរ សន្លឹកកិច្ចការ សៀវភៅគោល។

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** វិធីបង្រៀនតាមបែបដោះស្រាយបញ្ហា

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារ	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ ៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់ (**៣នាទី**)		
គ្រូពិនិត្យអវត្តមានសណ្តាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យ		ប្រធានថ្នាក់ឡើងប្រាប់គ្រូពីវត្តមាន
ជំហានទី២ ៖ រំលឹកមេរៀន (**៧នាទី**)		
បើ $q(x)$ ជាផលចែកនៃ $f(x)$ និង $p(x)$ មានសំណល់ $R(x)$ តើប្អូនអាចសរសេរលក្ខណៈទូទៅនៃប្រមាណវិធីនេះបានដូចម្តេច?	បើ $q(x)$ ជាផលចែកនៃ $f(x)$ និង $p(x)$ មានសំណល់ $R(x)$ នោះគេបាន៖ $f(x)=p(x)q(x)+R(x)$ បើ R ជាសំណល់នៃប្រមាណវិធីចែក	បើ $q(x)$ ជាផលចែកនៃ $f(x)$ និង $p(x)$ មានសំណល់ $R(x)$ នោះគេបាន៖ $f(x)=p(x)q(x)+R(x)$ បើ R ជាសំណល់នៃប្រមាណវិធីចែក $f(x)$ និង $(x-a)$ នោះ៖ $R=f(a)$

<table>
<tr><td>តើទ្រឹស្តីបទសំណល់នៃពហុធា $f(x)$ ចែកនិង $(x-a)$ ពោលមកដូចម្ដេច?</td><td>$f(x)$ និង $(x-a)$ នោះ
$R=f(a)$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">ជំពូកទី៣ ៖ មេរៀនថ្មី (៣០នាទី)</td></tr>
<tr><td>ប្រាប់សិស្សថាយើងនិងដោះស្រាយលំហាត់ទាក់ទងនឹងពហុធា បែងចែកសិស្សជាក្រុមឱ្យអានប្រធានលំហាត់ដើម្បីកំណត់
១.យល់បញ្ហា
ចូរប្អូនព្យាយាមស្រង់សម្មតិកម្មលំហាត់និងបន្ទាត់មកចោទជាសំណួរ។

២.ការបង្កើតផែនការ
ចូរប្អូនវិភាគពីលក្ខខណ្ឌផ្ទាល់និងសំណួរដែលគេសួរ។រួចរកយុទ្ធវិធីដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់។
-នៅពេលដែល $f(x)$ ចែក $x-2$ តើមានសំណល់ដូចម្ដេច?
-នៅពេល $f(x)$ ចែក $x-3$ តើមានសំណល់ដូចម្ដេច?
-នៅពេលដែល $f(x)$ ចែកនិង($x-2$)($x-3$)តើមានសំណល់ដូចម្ដេច?</td><td>២.៤ ទ្រឹស្តីបទសំណល់ និងទ្រឹស្តីបទផលគុណកត្តា
លំហាត់៖ គេឱ្យពហុធា $f(x)$ ចែកនិង $x-2$ មានសំណល់5។ នៅពេល $f(x)$ ចែកនិង $x-3$ មានសំណល់9ចូររកសំណល់របស់ពហុធា $f(x)$ ចែកនិង ($x-2$)($x-3$)។</td><td>សិស្សព្យាយាមអានប្រធានលំហាត់ជាក្រុម

១.យល់បញ្ហា៖
ស្រង់ពាក្យគន្លឹះ៖ ពហុធា, សំណល់ សម្មតិកម្ម៖
-គេឱ្យពហុធា $f(x)$ ចែកនិង $x-2$ មានសំណល់5
-នៅពេល $f(x)$ ចែកនិង $x-3$ មានសំណល់9
សំណួរ៖ រកសំណល់ របស់ពហុធា $f(x)$ ចែកនិង($x-2$)($x-3$)។
២.ការបង្កើតផែនការ
-នៅពេលដែល $f(x)$ ចែក $x-2$ តើមានសំណល់ជាចំនួនថេរ។
-នៅពេល $f(x)$ ចែក $x-3$ តើមានសំណល់ជាចំនួនថេរ។
-នៅពេល $f(x)$ ចែក $x-3$ តើមានសំណល់ដូចម្ដេច?
-នៅពេលដែល $f(x)$ ចែកនិង($x-2$)($x-3$)មានសំណល់
$R(x)=ax+b$
$f(x)=(x-2)(x-3)p(x)$
$+(ax+b)$</td></tr>
</table>

-នៅពេលដែល $f(x)$ ចែក និង($x-2$)($x-3$) ចូរប្អូនធ្វើប្រមាណវិធីនេះជា ទម្រង់សំណល់។ **៣.ការអនុវត្តផែនការ** -ចូរប្អូនយកលំនាំនៃវិធីដោះ ស្រាយខាងលើនេះមក អនុវត្តដើម្បីរកសំណល់នៃ ការចែក $f(x)$ និង($x-2$) ($x-3$)។ **ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ** -ចូរប្អូនធ្វើការផ្ទៀងផ្ទាត់ ចម្លើយឡើងវិញ។	**ចម្លើយ** $f(x)=(x-2)(x-3)q(x)$ $+ax+b$ គេបាន $f(2)=2a+b=5$ (1) $f(3)=3a+b=9$ (2) តាម(1) $b=5-2a$ ជំនួសក្នុង $3a+5-2a=9$ (2)គេបាន $a=4$ $\Rightarrow b=-3$ ដូចនេះសំណល់នៃការចែក $f(x)$ និង($x-2$)($x-3$)គឺ $R(x)=4x-3$	**៣.ការអនុវត្តផែនការ** $f(x)=(x-2)(x-3)q(x)$ $+ax+b$ គេបាន $f(2)=2a+b=5$ (1) $f(3)=3a+b=9$ (2) តាម(1) $b=5-2a$ ជំនួសក្នុង $3a+5-2a=9$ (2)គេបាន $a=4$ $\Rightarrow b=-3$ ដូចនេះសំណល់នៃការចែក $f(x)$ និង($x-2$)($x-3$)គឺ $R(x)=4x-3$ **៤.ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ** - $f(2)=R(2)=4(2)-3=5$ ពិត - $f(3)=R(3)=4(3)-3=9$ ពិត
ជំហានទី៤ ៖ ពង្រីកចំណេះដឹង (**៥នាទី**)		
ចូរប្អូនៗធ្វើលំហាត់ខាង ក្រោមជាបុគ្គល៖ គេឱ្យពហុធា $f(x)$ ចែកនិង $x-1$មានសំណល់3។នៅ ពេល $f(x)$ ចែកនិង $x+2$ មាន សំណល់6។ចូររកសំណល់ របស់ពហុធា $f(x)$ ចែកនិង $(x-1)(x-2)$។	**ចម្លើយ** $f(x)=(x-1)(x+2)q(x)$ $+ax+b$ គេបាន $f(1)=a+b=3$ (1) $f(-2)=-2a+b=6$ (2) តាម(1) $b=3-a$ ជំនួសក្នុង $-2a+3-a=6$ (2)គេបាន $a=-1$ $\Rightarrow b=4$ ដូចនេះសំណល់នៃការចែក $f(x)$ និង $(x-1)(x-2)$ គឺ $R(x)=-x+4$	សិស្សធ្វើតាមការណែនាំ **១.យល់បញ្ហា៖** **ស្រង់ពាក្យគន្លឹះ៖** ពហុធា, សំណល់ សម្មតិកម្ម៖ -គេឱ្យពហុធា $f(x)$ ចែកនិង $x-1$ មានសំណល់3 -នៅពេល $f(x)$ ចែកនិង $x+2$ មាន សំណល់6។ចូររកសំណល់ របស់ព ហុធា $f(x)$ ចែកនិង $(x-1)(x-2)$ **២.ការបង្កើតផែនការ** - $f(x)$ ចែកនិង $(x-1)(x-2)$ មាន សំណល់ $ax+b$

		៣.ការអនុវត្តផែនការ $f(x)=(x-1)(x+2)q(x)$ $+ax+b$ គេបាន $f(1)=a+b=3\ (1)$ $f(-2)=-2a+b=6\ (2)$ តាម (1) $b=3-a$ ជំនួសក្នុង $-2a+3-a=6$ (2) គេបាន $a=-1$ $\Rightarrow b=4$ ដូចនេះសំណល់នៃការចែក $f(x)$ និង $(x-1)(x-2)$ គឺ $R(x)=-x+4$ **ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ** - $f(1)=R(1)=-1+4=3$ ពិត - $f(-2)=R(-2)=-(-2)+4=6$ ពិត
ជំហានទី៥៖ កិច្ចការផ្ទះ និងបណ្ដាំផ្ញើ (៥នាទី)		
ចូរប្អូនដោះស្រាយលំហាត់ដូចខាងក្រោម	លំហាត់៖បើផលបូកនៃ x^2+3x-2 និង $-2x^2+x-1$ ចែកដាច់និង $x-1$ តើផលចែករបស់វាស្មើប៉ុន្មាន?	សិស្សត្រង់ត្រាប់ស្តាប់គ្រូ និងកត់លំហាត់ដោះស្រាយរួចជំរាបលាលោកគ្រូទៅផ្ទះ។

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី៤

កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃ.............ខែ........ឆ្នាំ.......ឯកស័ក ព.ស.២៥៦...
ត្រូវនឹងថ្ងៃ ទី.......ខែ......ឆ្នាំ ២០.....

មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៖ ១១

ជំពូកទី១ ៖ ស្វ៊ីត

មេរៀនទី២ ៖ ស្វ៊ីតនព្វន្ត
២. តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

រយៈពេល ៖ ៥០នាទី

I. **វត្ថុបំណង៖** ក្រោយពីសិក្សាមេរៀននេះចប់ សិក្ខាកាមនឹងទទួលបាន៖

១.វិជ្ជាសម្បទា៖ ពន្យល់ពីរបៀបរកតម្លៃតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តបានយ៉ាងត្រឹមតាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។

២.បំណិនសម្បទា៖ គណនាលំហាត់ដោយប្រើរូបមន្តតួទីn នៃស្វ៊ីតនព្វន្តបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។

៣.ចរិយាសម្បទា៖ បណ្តុះទម្លាប់សិក្សាជាក្រុមបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមរយៈការសម្របសម្រួលរបស់គ្រូ ។

II. **សម្ភារឧបទេស**

-កម្រងសំណួរ សៀវភៅគោល។

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** វិធីបង្រៀនតាមបែបដោះស្រាយបញ្ហា

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	**ខ្លឹមសារ**	**សកម្មភាពសិស្ស**
ជំហានទី១ ៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់ (៣នាទី)		
គ្រូពិនិត្យអវត្តមានសណ្តាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យ		ប្រធានថ្នាក់ឡើងប្រាប់គ្រូពីវត្តមាន
ជំហានទី២ ៖ រំលឹកមេរៀន (៧នាទី)		
-ចូរប្អូនឱ្យនិយមន័យស្វ៊ីតនព្វន្ត។ -ចូរសរសេររូបមន្តតួទីn នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត -បើយើងស្គាល់តម្លៃក្រៅពីតួទី1 (a_m) តើយើងត្រូវរក (a_n) ដូចម្តេច ?	និយមន័យ៖ ស្វ៊ីតនព្វន្ត គឺជាស្វ៊ីតដែលមានតួនីមួយៗក្រៅពីតួទី១ស្មើតួមុនបន្ទាប់បូកថែមចំនួនថេរ d មួយ។ ដែល d ហៅថាផលសងរួមនៃស្វ៊ីត។ ចម្លើយ $a_n = a_1 + (n-1)d$ -$a_n = a_m + (n-m)d, m < n$	ស្វ៊ីតនព្វន្ត គឺជាស្វ៊ីតដែលមានតួនីមួយៗក្រៅពីតួទី១ស្មើតួមុនបន្ទាប់បូកថែមចំនួនថេរdមួយ។ ដែល d ហៅថាផលសងរួមនៃស្វ៊ីត។ ចម្លើយ $a_n = a_1 + (n-1)d$ -$a_n = a_m + (n-m)d, m < n$

<table>
<tr><th colspan="3">ជំពូកទី៣ ៖ មេរៀនថ្មី (៣០នាទី)</th></tr>
<tr>
<td>បែងចែកសិស្សជាក្រុមឱ្យអានប្រធានលំហាត់ដើម្បីកំណត់

១.យល់បញ្ហា
សំណួរ៖ តើក្នុងប្រធានលំហាត់គេប្រាប់អ្វីហើយសួរកេអ្វី?

២.ការបង្កើតផែនការ
-ចូរសរសេររូបមន្តតួទី15 ដោយប្រើតួទី6។
-តាមសមីការ
$a_{15}=a_6+(15-6)d$ តើប្អូនអាចរកឃើញតម្លៃអ្វី?

៣.ការអនុវត្តផែនការ
-សរសេររូបមន្តតួទី 1012

-ដោះស្រាយរក a_1 និងd

-គណនាតួទី1012</td>
<td>២. តួទីnនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត
លំហាត់៖ គេមាន (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី 6 ស្មើ $\frac{7}{10}$ និងតួទី 15ស្មើ $\frac{5}{2}$។ គណនាតួទី1012។

ចម្លើយ
តាមរូបមន្ត $a_n=a_m+(n-m)d$
យើងបាន $a_{15}=a_6+(15-6)d$
$\frac{5}{2}=\frac{7}{10}+(15-6)d$
$25=7+90d$
$\Rightarrow d=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$
នាំឱ្យ
$a_{1012}=a_6+(1012-6)\times\frac{1}{5}$
$=\frac{7}{10}+\frac{1006}{5}$
$=\frac{2019}{10}$
ដូចនេះ តួទី1012ស្មើ $\frac{2019}{10}$</td>
<td>សិស្សព្យាយាមអានប្រធានលំហាត់ជាក្រុម
១.យល់បញ្ហា៖
-(a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត
-តួទី 6 ស្មើ $\frac{7}{10}$ និងតួទី 15ស្មើ $\frac{5}{2}$
-ដោយ $a_6<a_{15}\Rightarrow(a_n)$ ជាស្វ៊ីតកើននោះ $d>0$
-គណនាតួទី1012
២.ការបង្កើតផែនការ
-ប្រើប្រាស់រូបមន្តតួទីnនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត
$a_{15}=a_6+(15-6)d$
-រកឃើញតម្លៃអថេរ d

៣.ការអនុវត្តផែនការ
តាមរូបមន្ត $a_n=a_m+(n-m)d$
យើងបាន $a_{15}=a_6+(15-6)d$
$\frac{5}{2}=\frac{7}{10}+(15-6)d$
$25=7+90d$
$\Rightarrow d=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$
នាំឱ្យ
$a_{1012}=a_6+(1012-6)\times\frac{1}{5}$
$=\frac{7}{10}+\frac{1006}{5}$
$=\frac{2019}{10}$
ដូចនេះ តួទី1012ស្មើ $\frac{2019}{10}$</td>
</tr>
</table>

៤.ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ -ពិនិត្យមើលតម្លៃ $\frac{2019}{10}$ ថា តើត្រូវនិងតួទី1012ឬទេ ?		**៤.ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ** យើងមាន $a_6=\frac{7}{10},d=\frac{1}{5},a_n=\frac{2019}{10}$ នាំឱ្យ $\frac{2019}{10}=\frac{7}{10}+(n-6)\times\frac{1}{5}$ $2n=2019-7+12$ $n=1012$ $n=1012$ ពិត ដូចនេះតួទី 1012ស្មើ $\frac{2019}{10}$ -ស្តាប់និងកត់សម្គាល់
ជំហានទី៤ ៖ ពង្រឹងចំណេះដឹង (**៥នាទី**)		
ចូរប្អូនៗធ្វើលំហាត់ជាបុគ្គល៖	គេឱ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $a_5=18$ និង $a_9=30$ ។ចូររកតួទីnនៃស្វ៊ីតនេះ ?	**១.យល់បញ្ហា៖** -(a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត -តួទី5ស្មើ18 និងតួទី9ស្មើ30 -ដោយ $a_5<a_9$ នាំឱ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើន $d>0$ **២.ការបង្កើតផែនការ** -ប្រើប្រាស់រូបមន្ត តួទីn នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត យើងបាន $a_9=a_5+(9-5)d$ ហើយយើងអាចរកឃើញតម្លៃនៃអថេរd។ **៣.ការអនុវត្តផែនការ** តាមរូបមន្ត $a_n=a_m+(n-1)d$ យើងបាន $a_9=a_5+(9-5)d$ $30=18+(9-5)d$ $4d=12$ $\Rightarrow d=\frac{12}{4}=3$ នាំឱ្យ $a_n=a_5+(n-5)\times 3$ $=18+3n-15$ $=3n+3$

		គ្រូតពិនិត្យឡើងវិញ យើងមាន $a_5 = 18, a_n = 3n + 3$ $\Rightarrow a_5 = 3\times 5 + 3 = 18$ ដូចនេះ $a_n = 3n + 3$
ជំហានទី៥៖ កិច្ចការផ្ទះ និងបណ្តាំផ្ញើ (**៥នាទី**)		
កិច្ចការផ្ទះ	លំហាត់ទី6 ទំព័រ១៤។	ស្តាប់គ្រូណែនាំ

មេរៀនទី៣ ៖ តុក្កតាគំនិត (Concept Cartoons)

៣.១.ការណែនាំអំពីតុក្កតាគំនិត (Introduction of Concept Cartoons)

យុទ្ធសាស្រ្តទីពីរនៃគោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល ដែលទាក់ទងនឹងការយល់បញ្ញត្តិខុសរបស់សិស្សគឺ តុក្កតាគំនិត។

ដូចម្តេចដែលហៅថាតុក្កតាគំនិត ?

តុក្កតាគំនិតគឺ រូបគំនូរងាយៗដែលបង្ហាញពីទស្សនៈវិទ្យាសាស្រ្តទាក់ទងនឹងស្ថានភាពប្រចាំថ្ងៃ ឬជាតុក្កតាដែលមានទស្សនៈប្លែកៗជាច្រើនត្រូវបានបង្ហាញដោយតួអង្គផ្សេងៗ ដែលចូលរួមក្នុងការសន្ទនា។ ណែរ៉ូល និងកេហ្វ (១៩៩៩) បានអភិវឌ្ឍស្រាវជ្រាវនិងកែលម្អការប្រើប្រាស់របស់ពួកគេជាឧបករណ៍វាយតម្លៃវិទ្យាសាស្រ្តនិងបង្រៀន។ឥឡូវនេះពួកគកំពុងស្វែងរកការប្រើប្រាស់របស់ពួកគេនៅក្នុងគណិតវិទ្យា។

លក្ខណៈពិសេសរបស់ពួកគេរួមមាន៖

បទបង្ហាញនៃគំនិតជំនួសអំពីគំនិតមួយ រួមទាំងជំហរដែលអាចទទួលយកបាននៃវិទ្យាសាស្រ្តការប្រើរូបភាពមើលឃើញ ការប្រើប្រាស់ភាសាសរសេរតិចតួចបំផុត និងបរិបទដែលធ្លាប់ស្គាល់ចំពោះកុមារ។ ការសង្កេតរបស់សិស្សដែលប្រើរូបតុក្កតាគំនិតបានរកឃើញថាសិស្សតែងតែផ្លាស់ប្តូរគំនិតរបស់ពួកគេ ហើយណែនាំគំនិតថ្មីៗដល់ការពិភាក្សាជាក្រុម។សិស្សកំពុងធ្វើការបកស្រាយបង្ហាញថា ពួកគេកំពុងផ្លាស់ប្តូរគំនិតរបស់ពួកគេហើយពួកគេអាចបង្ហាញអំពីភាពត្រឹមត្រូវនៃការផ្លាស់ប្តូទាំងនេះ។ អ្នកសិក្សាហាក់ដូចជាចាប់ផ្តើមឆ្លងកាត់វិវាទនៃការយល់ដឹង មុនពេលពិភាក្សាគ្នាអំពីគំនិតផ្សេងៗគ្នាហើយទីបំផុតដោះស្រាយគំនិតដោយផ្អែកលើការអង្កេតការស្រាវជ្រាវ ឬការពិភាក្សា។ ជាក់ស្តែង ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើនេះគឺ បង្ហាញពីការធ្វើពិសោធន៍ទាក់ទងនឹងការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់។ តួអង្គក្នុងតុក្កតានេះ ព្យាយាមទស្សន៍ទាយពីលទ្ធផលនៃការពិសោធន៍នៃការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ចំនួនមួយដង ដោយផ្អែកលើមូលដ្ឋានគំនិត និងចំណេះដឹងផ្ទាល់ខ្លួនរបស់ពួកគេដែលតែងតែជួបប្រទះក្នុងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃរបស់ពួកគេ។ ចម្លើយដែលអាចទៅរួចទាំងនេះគឺផ្អែកទៅលើ ការយល់បញ្ញត្តិខុសរបស់សិស្សជារឿយៗ។ តាមរយៈរូបតុក្កតានេះ គំនិតដែលបង្ហាញហាក់ដូចជាងាយស្រួលសម្រាប់អ្នកសិក្សា ហើយពួកគេងាយស្រួលគិតថាតើគំនិតមួយណាស្របនឹងគំនិតរបស់គេ។

តើតុក្កតាអ្វីដែលទាក់ទាញ?

វត្ថុបំណងសំខាន់របស់តុក្កតាគំនិត គឺការបណ្ដុះគំនិតឱ្យសិស្សចេះគិត ចេះពិភាក្សា និងចេះលើកសំណួរថ្មីៗ ក៏ដូចជាឱ្យសិស្សចេះសង្កេត និងលើកហេតុផលជំទាស់។ តុក្កតាគំនិត គឺមានលក្ខណៈលើសពីសំណួរពហុជ្រើសរើស។ តុក្កតាគំនិត គឺជាឧបករណ៍ពញ្ញាក់សិស្សពាក់ព័ន្ធទៅនឹងការគិត និងការរុកចម្លើយ ឬបញ្ញត្តិដែលសមហេតុសមផល និងត្រឹមត្រូវ ។ ចម្លើយទាំងអស់គឺតំណាងការយល់បញ្ញត្តិខុសជាញឹកញយដែលកើតឡើងចំពោះអ្នកសិក្សា និងត្រូវតែមានការប្រុងប្រយ័ត្នពេលរៀនក្នុងថ្នាក់។ វាជារឿងសំខាន់ដែលត្រូវចំណាំថា គ្រប់ចម្លើយដែលអាចទៅរួចទាំងអស់ក្នុងតុក្កតា គឺមានលទ្ធភាពអាចកើតឡើងដូចៗគ្នា។ អ្នកសិក្សាត្រូវព្យាយាមជ្រើសរើស និងកំណត់បញ្ញត្តិត្រឹមត្រូវបំផុតដែលទាក់ទងនឹងស្ថានភាពចំណោទបញ្ហា។

លំនាំនៃការប្រកួតប្រជែងរវាងគំនិតផ្សេងៗគឺជាសណ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ក្នុងការទទួលបាននូវចំណេះដឹងបែបវិទ្យាសាស្ត្រ ហេតុផលនេះហើយដែលវិធីសាស្ត្រនេះគឺ សមស្របសម្រាប់ការបង្រៀនដើម្បីកសាងចំណេះដឹងមូលដ្ឋានរបស់ពួកគេឱ្យកាន់តែប្រសើរ ។

តុក្កតាគំនិតអាចសម្រេចបាននូវវត្ថុបំណងផ្សេងៗពីគ្នាដូចជា ៖

- ធ្វើឱ្យគំនិតរបស់សិស្សមានភាពច្បាស់លាស់ (អាចដឹងពីការយល់បញ្ញត្តិខុស)
- ជំរុញ និងអភិវឌ្ឍគំនិតរបស់សិស្ស
- បណ្ដុះគំនិតពិភាក្សាតាមបែបវិទ្យាសាស្ត្រ
- ផ្ដល់នូវចំណុចចាប់ផ្ដើមសម្រាប់ការអង្កេត (មើលវគ្គដំបូងនៃការរៀនដោយផ្អែកលើការរិះរក)
- បង្កើនការចូលរួមពាក់ព័ន្ធ និងការចាប់អារម្មណ៍លើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្រ
- បង្កើនការយល់បានស៊ីជម្រៅលើបញ្ញត្តិគណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្រ ។

តើគេប្រើយុទ្ធសាស្ត្រនេះដោយរបៀបណា?

តុក្កតាគំនិតអាចរួមបញ្ចូលជាមួយវិធីសាស្ត្របង្រៀនផ្សេងៗទៀតបាន ។ វិធីសាស្ត្រដែលអាចបង្រៀនបាន (ប្រើជាញឹកញយ) នៅក្នុងថ្នាក់ដែលមានសិស្ស២០នាក់។

១. ណែនាំប្រធានបទ និងបង្ហាញតុក្កតាដែលមានគំនិតផ្សេងៗគ្នា។

២. ស្នើសុំពេលមួយរយៈខ្លីសម្រាប់ការគិតរៀងៗខ្លួន។ ពិនិត្យមើលយោបល់ត្រឡប់ខ្លីៗរបស់សិស្ស ដើម្បីទទួលបានព័ត៌មានពីចំណេះដឹងដែលពួកគេមាន—អាចមានការបោះឆ្នោតជាជំនួសវិញ។

៣. លើកទឹកចិត្តឱ្យមានក្រុមពិភាក្សាតូចៗ(សិស្សចាប់ពី២នាក់ ទៅ ៤នាក់) និងប្រាប់សមាជិកក្នុងក្រុមឱ្យមានការសហការ និងឯកភាពគ្នាលើចម្លើយរួមដែលពួកគេរកបាន។ សកម្មភាពផ្សេងទៀតអាចមានក្នុងពេលកំពុងពិភាក្សា។ ការពិភាក្សាក្នុងថ្នាក់ឬជាក្រុមអំពីថាតើយើងគួរអង្កេតស្ថានភាពយ៉ាងដូចម្ដេចដើម្បីរកឃើញជម្រើសណាមួយដែលអាចទទួលយកបាន និងស្ថិតក្រោមលក្ខខណ្ឌមួយណា។ ក្រុមតូចពិភាក្សាលើការរិះរក (ឧទាហរណ៍ដូចក្នុង IBL)។

៤. ចែករំលែកលទ្ធផលនៃការរិះរក និងការពិភាក្សាពេញមួយថ្នាក់ រួមបញ្ចូលទាំងជម្រើសណាមួយដែលហាក់ដូចជាទទួលយកបាន និងព័ត៌មានបន្ថែមណាខ្លះដែលយើងត្រូវការ ដើម្បីឱ្យប្រាកដ។

៥. ទាញយកគំនិតទាំងអស់គ្នា និងផ្ដល់ការសង្ខេបយ៉ាងច្បាស់លាស់ពីបញ្ហាដំបូង ការរិះរកលទ្ធផល និងអ្វីៗដែលបានដឹងពីការរិះរក។

៦. ពិចារណាមើលថាតើទស្សនៈរបស់សិស្សបានផ្លាស់ប្តូរយ៉ាងដូចម្តេច ហើយអ្វីដែលបណ្តាលឱ្យសិស្សដូរគំនិតរបស់គេ។

តុក្កតាត្រូវតែបានបង្ហាញយ៉ាងច្បាស់នៅក្នុងថ្នាក់។ ការបញ្ចាំងរូបភាពតុក្កតាគឺសំខាន់ ប៉ុន្តែប្រសិនបើមិនអាចធ្វើបានរូបភាពតុក្កតាគួរតែបោះពុម្ពសម្រាប់សិស្ស ឬគួរដាក់លើក្តារខៀន។ អាស្រ័យលើរូបតុក្កតដែលអ្នកប្រើ និងរបៀបដែលអ្នកប្រើ អ្នកនឹងត្រូវការសម្ភារបន្ថែមទៀត ដូចជាសម្ភារសម្រាប់ការអង្កេតពិសោធន៍បន្ថែមជាដើម។

ឧទាហរណ៍១ការពិភាក្សាក្នុងថ្នាក់អំពីពន្លាតកន្សោម $(x+y)^2$

ការណែនាំជាជំហានៗ

១. បង្ហាញ(បង្កើត)តុក្កតាគំនិតដល់សិស្ស និង ប្រធានបទ ។

២. ផ្តល់ពេលដល់សិស្ស ដើម្បីការគិតរៀងៗខ្លួន ពេលពួកគេកំពុងអាន និងព្យាយាមឆ្លើយនូវសំណួរ។

ក- តើអ្នកយល់ស្របជាមួយតួអង្គមួយណា?

ខ- តើមានគំនិតត្រឹមត្រូវលើសពីមួយ ឬទេ?

ហេតុអ្វីបានជាសំណួរនេះសំខាន់? សិស្សចាំបាច់ត្រូវគិតអំពីហេតុផលថាតើហេតុអ្វីសំណួរនេះត្រឹមត្រូវ ឬខុស។ អាចថាអំណះអំណាងណាមួយត្រឹមត្រូវដោយផ្នែកតែប៉ុណ្ណោះ។ រយៈពេលនៃការគិតនេះអាចភ្ជាប់ដោយឧទាហរណ៍តូចមួយ។

គ- ចូរបង្កើតរូបមន្ត $(x+y)^2$ ។

៣. ធ្វើការពិនិត្យយ៉ាងលឿនដើម្បីដឹងថា តើក្នុងក្រុមកំពុងគិតអ្វី?

៤. រៀបចំការពិភាក្សាមួយថ្នាក់ពេញ។ ពិភាក្សាទៅលើចម្លើយដែលអាចត្រឹមត្រូវទាំងអស់។

ប្រើសំណួរជួយសិស្សបង្កើតហេតុផលត្រឹមត្រូវ។ ចំពោះឧទាហរណ៍ខាងលើ សំណួរដែលអាចប្រើគឺ៖

ក-តើអ្នកនឹងទទួលបានអ្វី ប្រសិនបើអ្នកយកចំនួនពិត x គុណនឹងចំនួនពិត x ខ្លួនឯង?

ខ-ដូចសំណួរខាងលើ ប្រសិនបើអ្នកយកចំនួនពិត x + y គុណនឹងចំនួនពិត x + y ខ្លួនឯងតើអ្នកនឹងទទួលបានអ្វី?

គ-តើអ្នកអាចពន្លាតកន្សោម $(x+y)^2$ បានដែរឬទេ?

ឃ-តើអ្នកអាចពន្យល់ពីលទ្ធផលដែលអ្នករកឃើញបានឬទេ?

ការពន្យល់ប្រយោគគំនិត

ចំពោះការពន្លាតឯកលក្ខណៈភាព $(x+y)^2$ យើងមានចម្លើយបួនគឺ $x^2+2xy+y^2$, x^2+y^2 $x^2+xy+yx+y^2$ និង $x^2+xy+xy+y^2$ ដែលតំណាងឱ្យគំនិតផ្ទុយគ្នារបស់សិស្សដែលត្រូវបានយកមកពិភាក្សា។ សិស្សទាំងអស់ហាក់ដូចជាមិនមានភាពជឿជាក់ទៅលើចម្លើយណាមួយឱ្យពិតប្រាកដនោះទេ។ ចូរទុកសិស្សពិភាក្សា និងធ្វើគម្រោងមួយអំពីរបៀបគូសយកចម្លើយត្រឹមត្រូវ ។ ចម្លើយអាចត្រូវបានរកឃើញបានដោយសារការធ្វើពិសោធន៍និង/ឬដោយសារ ការប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តី និងការរកហេតុផល ។

សិស្សជ្រើសរើសតម្លៃ x និង y ជាក់លាក់ណាមួយដើម្បីជំនួសក្នុងចម្លើយដែលមានក្នុងរូបតុក្កតាទាំង៤ខាងលើ។ ជាឧទាហរណ៍ ចំពោះ($x=1$ និង $y=1$),($x=-1$ និង $y=2$),($x=0$ និង $y=-3$) និង ($x=-1$ និង $y=-2$)នោះគេនឹងឃើញមានចម្លើយរបស់សិស្សតែពីរគត់គឺចម្លើយរបស់កុសល និងសុខដែលផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងឯកលក្ខណៈភាព$(x+y)^2$ ។ លើសពីនេះ ដោយណែនាំសិស្សពីលក្ខណៈបំបែក និងត្រឡប់នៃប្រមាណវិធីគុណសិស្សរកបាននូវរូបមន្តត្រឹមត្រូវក្នុងការពន្លាតកន្សោមខាងលើគឺ$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ ។

សេចក្តីសន្និដ្ឋាន

តុក្កតាគំនិតនេះបង្ហាញពីតម្រូវការនៃការបកស្រាយរូបមន្តឯកលក្ខណៈភាព$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ ។ លើសពីនេះទៅទៀត សិស្សត្រូវបានពញ្ញាក់ការគិតអំពីបញ្ញត្តិវិទ្យាសាស្ត្រនានា និងអំពីរបៀបតេស្តសម្មតិកម្មរបស់ពួកគេតាមរយៈការជំនួសតម្លៃលេខជាក់លាក់។

- សេចក្តីសន្និដ្ឋានទី១៖ ដើម្បីពន្លាតឯកលក្ខណៈភាព$(x+y)^2$ គេត្រូវសរសេរ $(x+y)^2=(x+y)(x+y)$ ។
- សេចក្តីសន្និដ្ឋានទី២៖ តាមលក្ខណៈនៃប្រមាណវិធីគុណចំពោះប្រមាណបូក គេទទួលបាន
$$(x+y)^2=(x+y)(x+y)$$
$$=x^2+xy+yx+y^2$$
- សេចក្តីសន្និដ្ឋានទី៣៖ តាមលក្ខណៈត្រលប់នៃប្រមាណវិធីគុណ គេបានលទ្ធផលចុងក្រោយ
$$(x+y)(x+y)=x^2+xy+yx+y^2$$
$$=x^2+xy+xy+y^2 \quad ;xy=yx$$
$$=x^2+2xy+y^2$$

ការណែនាំជាជំហានៗបង្ហាញថា វាមានសារសំខាន់ណាស់ក្នុងការពិភាក្សាប្រយោគគំនិតនៅក្នុងតុក្កតាទាំងប្រយោគគំនិតត្រឹមត្រូវ និងមិនត្រឹមត្រូវ។ការពញ្ញាក់ការគិតអំពីប្រយោគគំនិតដល់សិស្សចាំបាច់ត្រូវតែមាន ដើម្បីជជែកវែកញែករកហេតុផលថាហេតុអ្វីបានជាគំនិតនោះត្រឹមត្រូវ ឬមិនត្រឹមត្រូវ សាកល្បងរៀបចំការពិសោធន៍ដើម្បីតេស្តរកសុពលភាពរបស់ប្រយោគគំនិត និងនិយមន័យគំនិតទាំងនោះបានដោយខ្លួនឯងដោយប្រើ ពាក្យពេចន៍ផ្ទាល់ខ្លួនរបស់ពួកគេ។

៣.២.គន្លឹះសំខាន់នៃតុក្កតាគំនិត (Tips of concept cartoons)

តុក្កតាគំនិតលេចឡើងដើម្បីកាត់បន្ថយហានិភ័យនៃការភ័យខ្លាចក្នុងការផ្តល់ចម្លើយ "ខុស" ។

តុក្កតាគំនិត **មិន** ចាំបាច់មាន "**ចម្លើយត្រឹមត្រូវ**" តែមួយគត់ នោះឡើយ។ នៅក្នុងករណីជាច្រើន មានតែសេចក្តីសន្និដ្ឋានប្រកបដោយហេតុផលប៉ុណ្ណោះដែលពាក់ព័ន្ធ **វាអាស្រ័យទៅលើ/ទៅតាម....** ជាមួយនឹង

ប្រយោគគំនិត។ សូម្បីតែស្ថានភាពធម្មតាទំនងអាចមានកត្តាស្មុគស្មាញមួយចំនួន នៅពេលដែលពួកវាត្រូវបានពិនិត្យពិច័យជិតដល់ ។ ជារឿយៗ ដូចនៅក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រពិតដែរ បញ្ហាវិទ្យាសាស្ត្រមិនមានចម្លើយត្រឹមត្រូវតែមួយគត់នោះឡើយ ។ វាគឺជាគោលបំណងសំខាន់មួយសម្រាប់សិស្ស គ្រូ ក្នុងការទទួលបាននូវការយល់ច្បាស់លាស់នេះ។

គ្រូជាច្រើនមានបញ្ហាជាមួយនឹងវិធីសាស្ត្របង្រៀនវិទ្យាសាស្ត្រនេះ ។ ការរិះគន់របស់ពួកគេគឺថាស្ថានភាពនៅក្នុងតុក្កតាគួរតែបញ្ជាក់កាន់តែច្បាស់ជាងនេះ ព្រោះថាវាមានចម្លើយត្រឹមត្រូវតែមួយប៉ុណ្ណោះ។ វាគឺជាវត្ថុបំណងសំខាន់មួយរបស់តុក្កតាគំនិតដែលសិស្សរៀនបញ្ចេញគំនិតតាមរយៈតុក្កតាវាក៏សំខាន់ផងដែរ ដែលទុកសិស្ស គ្រូ ជជែកវែកញែក និងពិភាក្សាអំពីវិទ្យាសាស្ត្រ ជាជាងការផ្តល់នូវចម្លើយត្រឹមត្រូវលឿនពេក ។

ដូច្នេះ វាពិតជាសំខាន់ណាស់ក្នុងការដឹងអ្វីដែលទំនងជាចម្លើយដែលសិស្ស គ្រូអាចផ្តល់ក្នុងគោលបំណងគិតទុកមុនក្នុងផ្លូវល្អ។

តើការប្រើប្រាស់វាមានអត្ថប្រយោជន៍អ្វីខ្លះ? (What are the benefits of using them)

គំនូរតុក្កតាគំនិតត្រូវបានបង្ហាញដល់៖

- ឱ្យមាន" ការលើកទឹកចិត្ត និងចំណាប់អារម្មណ៍ខ្ពស់ ឬខ្ពស់បំផុត"ក្នុងចំណោមអ្នកសិក្សា។
- ជួយអ្នកនិយាយដែលស្ទាក់ស្ទើរក្នុងការ ចូលរួមពិភាក្សាជាក្រុម នៃគំនិត។ រូបថ្លុកនៃគំនិតបង្ហាញពីគំនិតរួម និងផ្តល់ឱ្យសិស្សទាំងអស់នេះចេះសហការ។ ពួកគេមិនត្រូវបានបំភិតបំភ័យនៅពេលបង្ហាញទស្សនៈផ្ទាល់ខ្លួនរបស់ពួកគេទេ ពីព្រោះពួកគេកំពុងចាប់ផ្តើមជាមួយនឹងការពិភាក្សាអំពីទស្សនៈរបស់តួអង្គនៅក្នុងរូបថ្លុក។
- បង្កើន គុណភាពការងារ ការសរសេរ និងការពិភាក្សាជាក្រុម។
- នៅតែមាន អត្ថប្រយោជន៍សូម្បីតែបន្ទាប់ពីការប្រើប្រាស់ម្តងហើយម្តងទៀត។
- ធ្វើឱ្យ គំនិតរបស់អ្នកសិក្សាកាន់តែមានភាពងាយស្រួលសម្រាប់គ្រូក្នុងអំឡុងពេលបង្រៀនក្នុងថ្នាក់។ នៅក្នុងវិធីនេះពួកគេបានបញ្ចូលគ្នាទាំងការរៀន និងការវាយតម្លៃសម្រាប់ការរៀន។
- ធ្វើឱ្យសិស្ស យល់ដឹង កាន់តែ ច្បាស់ពីគំនិតផ្ទាល់ខ្លួន និងគំនិតរបស់មិត្តភក្តិក៏ដូចជាធ្វើឱ្យពួកគេដឹងអំពីការផ្លាស់ប្តូរគំនិតរបស់ពួកគេ។
- បង្កើន សមត្ថភាពសិស្ស ដើម្បីបង្ហាញពីគំនិតរបស់ពួកគេ។
- ផ្តល់នូវ ការលើកទឹកចិត្តដ៏ល្អ សម្រាប់ការអង្កេត។ ជាញឹកញាប់ការចាប់ផ្តើមសិស្សធ្វើការអង្កេតដោយគ្រូដែលបានជំរុញឱ្យ។

៣.៣.តើតុក្កតាគំនិតអាចត្រូវបានប្រើក្នុងមេរៀនយ៉ាងដូចម្តេច?

ការចាប់អារម្មណ៍ និងការចូលរួមរបស់សិស្សអំឡុងមេរៀនគឺមានពេលខ្លះពិបាក និងធុញថប់។ ប៉ុន្តែវាមានសារៈសំខាន់ណាស់ប្រសិនបើសិស្សានុសិស្សទទួលបានអត្ថប្រយោជន៍ពីមេរៀនដែលបានបង្រៀន គ្រូ

ម្នាក់បានប្រើគំនូរជីវចលក្នុងមេរៀនវិទ្យាសាស្ត្រ ហើយបានរកឃើញថាសិស្សរបស់នាងមិនត្រឹមតែរីករាយនឹងខ្លួនឯងប៉ុណ្ណោះទេ ប៉ុន្តែថែមទាំងទទួលបានការយល់ដឹងកាន់តែច្បាស់អំពីគំនិតផងដែរ។

ជំហានទូទៅខាងក្រោមត្រូវបានគេណែនាំឱ្យរៀបចំផែនការមេរៀន ដើម្បីធានាបាននូវការប្រើប្រាស់តុក្កតាគំនិតប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាពបំផុត។

១- ការណែនាំអំពីសកម្មភាព។

២- ឱ្យសិស្សគិតពិចារណាអំពីតុក្កតាហើយពិភាក្សាជាក្រុមតាមគំនិតរបស់ពួកគេ។

៣- គ្រូគួរតែពិនិត្យតាមក្រុមនីមួយៗ និងធ្វើអន្តរាគមន៍នៅពេលចាំបាច់។

៤- ការអង្កេតជាក់ស្តែងដែលគ្រូបន្តធ្វើអន្តរាគមន៍ និងអន្តរាគមន៍នៅពេលចាំបាច់។

៥- ការពិភាក្សាក្នុងថ្នាក់ទាំងមូលដើម្បីកែលំអ ចែករំលែកគំនិត និងលើកហេតុផលជំទាស់។

ជំហានទាំងនេះត្រូវបានអនុវត្តនៅពេលប្រើរូបតុក្កតាជាគំនិតដើម្បីបង្កើតការយល់ដឹង និងការយល់ច្រលំរបស់អ្នកសិក្សា និងជម្រុញឱ្យមានការអង្កេត។

៣.៤.គំនិតតុក្កតាជាយុទ្ធសាស្ត្របង្រៀន (Concept Cartoons as Teaching Strategy)

គំនិតវិទ្យាច្រើនតែមានលក្ខណៈអរូបី និងពិបាកយល់ជាពិសេសសម្រាប់កុមារ។ងើយនៅពេលដែលគ្រូព្យាយាមពន្យល់ពួកគេតាមរបៀបសាមញ្ញតាមដែលអាចធ្វើទៅបាន ពួកគេនឹងប្រឈមគ្រោះថ្នាក់នៃការបកស្រាយគំនិតទាំងនេះ។ វាក៏ជារឿងធម្មតាដែរសម្រាប់សិស្សក្នុងការអភិវឌ្ឍគំនិតយល់ច្រលំអំពីគំនិតទាំងនេះ។ តើយើងអាចជួយសិស្សរបស់យើងឱ្យយល់ច្បាស់អំពីប្រធានបទវិទ្យាសាស្ត្រស្មុគស្មាញយ៉ាងដូចម្តេច?

គ្រូម្នាក់បានសម្រេចចិត្តប្រើរូបតុក្កតាដើម្បីជួយដល់ថ្នាក់បឋមសិក្សាទី៤របស់នាងឱ្យរៀនអំពីMatte។

លោកស្រី Farah Aida Rahmat ដែលនៅពេលនោះកំពុងបង្រៀននៅសាលា បឋមសិក្សា Pasir Ris ក៏បានព្យាយាមសង្កេត និងកត់ត្រាអំពីប្រសិទ្ធភាពរបស់វាតាមរយៈការស្រាវជ្រាវសកម្មភាព។

តើអ្វីជាតុក្កតាគំនិត? (What are Concept Cartoons?)

កញ្ញា ហ្វារ៉ាបានប្រើ "គំនូរជីវចលគំនិត" នៅក្នុងមេរៀនរបស់នាង។គំនូរតុក្កតាគឺជា "គំនូរបែបគំនូរជីវចលដែលបង្ហាញតួអង្គដែលមានទស្សនៈខុសគ្នាជុំវិញស្ថានភាពជាក់លាក់មួយ"(Roesky & Kennepohl, ២០០៨, ទំព័រ ១៣៥៥)។ យោងតាមអ្នកស្រាវជ្រាវ Brenda Keogh និង Stuart Naylor (១៩៩៩) រូបតុក្កតាគំនិតគឺមានលក្ខណៈល្អិតល្អន់បំផុតជាយុទ្ធសាស្ត្របង្រៀន។ ពួកគេអាចត្រូវបានគេផ្តល់ការងារនៅទូទាំងមុខវិជ្ជាដូចជាក្នុងការអភិវឌ្ឍជំនាញអានជាភាសាអង់គ្លេសឬការបង្រៀនដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងគណិតវិទ្យា។ តុក្កតាគំនិតក៏អាចត្រូវបានប្រើនៅដំណាក់កាលផ្សេងៗគ្នានៃមេរៀនផងដែល ជាគន្លឹះដើម្បីធ្វើឱ្យសិស្សមានភាពរំជើបរំជួលដែលជាសកម្មភាពឆ្លើយតបទៅនឹងការឆ្លើយតបរបស់សិស្ស និងបង្កើតការពិភាក្សា ឬជាមធ្យោបាយនៃការសង្កេតប្រធានបទនៅចុងបញ្ចប់។

លោកស្រីហ្វារ៉ាកេឃើញថា គំនូរជីវចលបែបនេះមានអត្ថប្រយោជន៍សម្រាប់ការបោសសំអាតការភាន់ច្រលំរបស់សិស្សអំពីប្រធានបទវិទ្យាសាស្ត្រ ។

ការឆ្លុះបញ្ចាំងរបស់គ្រូ

ការស្រាវជ្រាវសកម្មភាពនេះធ្វើឱ្យខ្ញុំគិតយ៉ាងម៉ត់ចត់អំពីវិធីដែលសិស្សរបស់ខ្ញុំភ្ជាប់ទំនាក់ទំនងរវាងអ្វីដែលពួកគេដឹង ទៅនឹងអ្វីដែលត្រូវបានបង្រៀនដល់ពួកគេ។

នេះជាអ្វីដែលលោកស្រីហ្វាក់កត់សំគាល់នៅពេលគាត់ឆ្លុះបញ្ចាំងសកម្មភាពនៃការស្រាវជ្រាវ។ នាងបានធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅសាលាបឋមសិក្សា Pasir Ris ដោយមានការគាំទ្រពីនាយកស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងអប់រំសុខភាព។

គោលបំណងនៃគម្រោងស្រាវជ្រាវសកម្មភាពនេះ គឺដើម្បីសង្កេតមើលផលប៉ះពាល់នៃគំនូរជីវចលគំនិតដែលជាយុទ្ធសាស្ត្របង្រៀន។ជាពិសេសនាងចាប់អារម្មណ៍នឹងប្រសិទ្ធភាពរបស់វា ក្នុងការដោះស្រាយការយល់ឃើញខុសដែលនឹងកើតឡើងក្នុងការសិក្សាប្រធានបទថ្មី។

លោកស្រី ហ្វាក់ធ្វើការជាមួយថ្នាក់បឋមសិក្សា៤នៃសិស្សដែលមានសម្ថភាពខ្ពស់ ៤០ នាក់។ នាងបានបង្រៀនមេរៀនចំនួនពីរលើប្រធានបទ Matter និងសិស្សបានធ្វើបទបង្ហាញក្នុងមេរៀនទី៣។ មេរៀនទាំងនេះត្រូវបានយកគំរូតាមគំរូ 5E-enquiry នៃការបង្រៀន និងការរៀន។ គំនូរតុក្កតាគំនិតត្រូវបានគេប្រើនៅដំណាក់ផ្សេងៗគ្នានៃការរៀន-ដំណាក់កាលចូលរួមការស្វែងយល់ការរុករកអេឡិចត្រូនិក និងវាយតម្លៃ។

នៅចុងបញ្ចប់នៃការសិក្សា នាងសង្កេតឃើញថា សិស្សរបស់នាងទទួលបានអត្ថប្រយោជន៍ពីការប្រើប្រាស់រូបតុក្កតាគំនិតក្នុងការបង្រៀនរបស់នាង។សិស្សអាចគ្រប់គ្រងការយល់ច្រឡំអំពីប្រធានបទ ហើយសំខាន់បំផុតពួកគេរីករាយនឹងខ្លួនឯងមានការយ៉ាងហ្មត់ចត់។

អ្នកស្រី ហ្វាក់ បានកំណត់សំគាល់ថា"នៅពេលសិស្សរបស់ខ្ញុំរីករាយនឹងពេលរៀនពួកគាត់ហាក់ដូចជារៀនកាន់តែច្រើន"។ ការចូលរួមរបស់ពួកគេក្នុងដំណើរនៃការរៀនសូត្រគឺចាំបាច់សម្រាប់ភាពជោគជ័យនៃការរៀនសូត្ររបស់ពួកគេផ្ទាល់។ ហេតុអ្វីត្រូវប្រើតុក្កតាគំនិត?(Why Use Concept Cartoons?)

ច្បាស់ណាស់មានអត្ថប្រយោជន៍ជាច្រើនពីការប្រើប្រាស់រូបតុក្កតាគំនិត

1. **ការចាប់អារម្មណ៍**

កុមារ និងមនុស្សពេញវ័យដូចគ្នាដូចតុក្កតាដែរ។ ជាធម្មតាពួកគេភ្ជាប់តុក្កតាជាមួយនឹងភាពសប្បាយរីករាយ និងលេងសើច។ ដូច្នេះ តុក្កតាគំនិត ផ្តល់នូវវិធីទាក់ទាញ និងមិនគំរាមគំហែង ដើម្បីតំណាងគំនិត។ សិស្សទំនងជាមានភាពក្លៀវក្លាចំពោះសកម្មភាពដែលនឹងមកដល់ហើយបន្ទាប់មកនឹងត្រូវបានផ្តោតអារម្មណ៍និងទទួលយកការរៀន។

2. **បង្កើតការចូលរួម**

នៅក្នុងរូបតុក្កតាគំនិត ត្រូវបង្ហាញយ៉ាងល្អិតល្អន់។ គំនិតទាំងនេះអាចត្រូវបានគិតយ៉ាងខ្លាំងដែលសិស្សត្រូវបានចូលរួមក្នុងការសន្ទនា ដោយក្លាយតួអង្គមួយដែលផ្តល់នូវការពិភាក្សាថ្នាក់រស់រវើក។ ដូច្នេះ មេរៀនកាន់តែមានអន្តរកម្មនឹងផ្តោតលើសិស្សនៅពេលសិស្សចូលរួមយ៉ាងសកម្មក្នុងការរៀនសូត្ររបស់ពួកគេ។

3. **អភិវឌ្ឍជំនាញ**

កំឡុងពេល ពិភាក្សាតុក្កតាគំនិត សិស្សត្រូវនិយាយពាក្យសំដី និងគំនិតរបស់ពួកគេ។ ពួកគេត្រូវបានលើកទឹកចិត្តឱ្យប្រកាន់ជំហលើគំនិតផ្សេងគ្នាដែលបានបង្ហាញ។ ប្រសិនបើពួកគេមិនយល់ស្របពួកគេអាចបង្ហាញ និងការពារទស្សនៈរបស់ពួកគេ។ដំណើរការនេះអនុញ្ញាតឱ្យគ្រូ ទទួលបានការយល់ដឹងសំខាន់ៗអំពីការយល់ដឹងរបស់សិស្ស។ ការចូលរួមក្នុងការពិភាក្សាបែបនេះក៏អាចឱ្យសិស្សទទួលបានជំនាញផងដែរ។

តើអ្វីដែលគ្រូត្រូវធ្វើ?

ក-បង្ហាញរូបតុក្កតាគំនិតដល់សិស្សម្នាក់ៗ ឬក្រុមតូចនៃថ្នាក់រៀន។

ខ-សុំឱ្យពួកគេផ្តល់គំនិតយោបល់ ឬសុំឱ្យពួកគេចង្អុលបង្ហាញថាតើគំនិតយោបល់ណាមួយដែលពួកគេយល់ស្របជាមួយ

គ-សុំឱ្យសិស្សផ្តល់ហេតុផលសម្រាប់ជម្រើសរបស់ពួកគេ។ នេះមានសារៈសំខាន់ជាពិសេសសម្រាប់ដំណើរការគិតរបស់ពួកគេ។

ឃ-លើកទឹកចិត្តឱ្យមានការជជែកវែកញែករវាងសិស្ស និងសិស្សដែលមានមតិខុសគ្នា។

ង-តាមដានការពិភាក្សាជាមួយសិស្សបង្កើតការសើបអង្កេតដើម្បីស្វែងរកគំនិតរបស់ពួកគេ។

ចំណាំថា សម្រាប់តុក្កតាគំនិតខ្លះប្រហែលជាមិនមានចម្លើយត្រឹមត្រូវទេ។ "វាអាស្រ័យលើ….." អាចជាការឆ្លើយតបសមស្រប។

៣.៥.ការប្រើប្រាស់តុក្កតាគំនិត (Using Concept Cartoons)

រូបគំនូរតុក្កតាគំនិតខាងលើត្រូវបានបង្កើតឡើង ដើម្បីដោះស្រាយការយល់ច្រឡំថាបង្ហាញពីគំនិតជាក់លាក់មួយ។

តុក្កតាមានប្រយោជន៍ជាឧបករណ៍បង្រៀនដើម្បីអញ្ជើញសិស្សឱ្យបញ្ចេញមតិ និងផ្តល់ហេតុផលសម្រាប់គំនិតរបស់ពួកគេ។ លក្ខណៈក្រៅផ្លូវការនៃគំនូរជីវចលគំនិតជុំវិញឱ្យសិស្សបង្ហាញពីទស្សនៈរបស់ពួកគេដោយមិនភ័យខ្លាចការវិនិច្ឆ័យ។ ប្រការនេះបើកឱកាសឱ្យគ្រូស៊ើបអង្កេត និងបញ្ជាក់គំនិតរបស់សិស្សរបស់ពួកគេលើប្រធានបទ។

ហេតុអ្វីបានជាគំនូរតុក្កតាគំនិតត្រូវបានគេប្រើ?

- ពិនិត្យគំនិតផ្ទាល់ខ្លួនជំរុញការពិភាក្សា និងកំណត់ការសាកសួរដែលអាចកើតមាននៅពេលចាប់ផ្តើមមេរៀន
- នៅចុងបញ្ចប់នៃប្រធានបទដើម្បីពិនិត្យមើលការរៀន និងអនុវត្តគំនិតទៅនឹងស្ថានភាព
- អភិវឌ្ឍជំនាញអក្ខរកម្មសម្រាប់បង្រៀនអង់គ្លេសនិងលើកទឹកចិត្តឱ្យអ្នករាល់គ្នាបញ្ចេញទស្សនៈរបស់អ្នក

មេរៀនទី៤ ៖ អាំងតេក្រាលកំណត់

៤.១.និយមន័យ

គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់លើអង្កត់ $[a,b]$ ហើយមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះ $]a,b[$
គេចែកអង្កត់ $[a,b]$ ជា n ចំណែកតូចៗស្មើគ្នាដោយស្ទីតកំណត់
ដែល $x_i=a+i\frac{b-a}{n}$ ហើយ $\Delta x=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$ $(i=0,1,2,3,.......)$ ។
នោះគេបានផលបូកផលបូកផ្ទៃក្រឡាចតុកោណនីមួយៗគឺ

$$S_n=(x_1-x_0)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_2)+....+(x_n-x_{n-1})f(x_n)$$

ដោយ $x_1-x_0=x_2-x_1=x_2-x_1=...=x_n-x_{n-1}=\frac{b-a}{n}=\Delta x$

$$S_n=(x_1-x_0)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_2)+....+(x_n-x_{n-1})f(x_n)$$
$$=\Delta xf(x_1)+\Delta xf(x_2)+....+\Delta xf(x_n)$$
$$=\Delta x(f(x_1)+f(x_2)+....+f(x_n))$$
$$=\Delta x\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$$ ដែល $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$ $,(k=1,2,3......)$

នោះគេបាន $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$

ឧទាហរណ៍ ១ ដោយប្រើនិយមន័យខាងលើ ចូរគណនា $I=\int_0^1 x^2dx$

គេយក $[0,1]$ ចែកជា n ចំណែកតូចៗស្មើគ្នាដោយស្ទីតកំណត់ $0=x_0<x_1<x_2<....<x_{n-1}<x_n=1$
យើងបាន

$$x_i=0+\frac{1-0}{n}i=\frac{1}{n}i \quad \text{ហើយ} \quad \Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

ដូចនេះ $\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+....+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+....+n^2)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$$
$$=\frac{1}{3}$$

ឧទាហរណ៍ ២ ដោយប្រើនិយមន័យខាងលើ ចូរគណនា $J=\int_1^2 e^xdx$

គេយក $[1,2]$ ចែកជា n ចំណែកតូចៗស្មើគ្នាដោយស្ទីតកំណត់ $1=x_0<x_1<x_2<....<x_{n-1}<x_n=2$
យើងបាន

$x_i = 1+\frac{2-1}{n}i = 1+\frac{1}{n}i$ ហើយ $\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$

$\sum_{k=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} e^{(1+\frac{1}{n}i)}\left(\frac{1}{n}\right)$

ដូចនេះ $\int_0^1 e^x dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} e^{(1+\frac{1}{n}i)}(\frac{1}{n})$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[e^{(1+\frac{1}{n})} + e^{(1+\frac{2}{n})} + ... + e^{(1+\frac{n}{n})}]$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{e}{n}(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + ... + e^{\frac{n}{n}})$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{e}{n}(e^{\frac{1}{n}}\frac{(1-(e^{(\frac{1}{n})})^n}{1-e^{\frac{1}{n}}})$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{e(1-e)(e^{\frac{1}{n}})}{n(1-e^{\frac{1}{n}})}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{e(1-e)(1-e^{\frac{1}{n}}-1)}{n(1-e^{\frac{1}{n}})}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{e(1-e)}{n(1-e^{\frac{1}{n}})} + \lim_{n\to\infty}\frac{e(1-e)(-e^{\frac{1}{n}}-1)}{n(1-e^{\frac{1}{n}})}$ $,(\lim_{n\to\infty}\frac{e(1-e)}{n} = 0)$

$= \frac{e(1-e)}{\lim_{n\to\infty} n(1-e^{\frac{1}{n}})}$

$+\lim_{n\to\infty} n(1-e^{\frac{1}{n}})$

តាង

$t = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{t}$

$n \to \infty \Rightarrow t \to 0$

គេបាន

$\lim_{n\to\infty} n(1-e^{\frac{1}{n}})$

$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(1-e^t)$

$= \lim_{t\to 0}\frac{1-e^t}{t}$

$= -\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = -1$

ដូចនេះ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e(1-e)}{n(1-e^{\frac{1}{n}})}$$

$$=-e(1-e)$$

$$=e^2-e$$

ដូចនេះ $\int_1^2 e^x dx = e^2 - e$

លំហាត់ទី១ ដោយប្រើ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ ដែល F ជាព្រីមីទីវនៃ f ។

ចូរគណនាលីមីត

$$1)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+3^k+...+n^k}{n^{k+1}}\right)$$

$$2)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$3)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+...+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

4) $u_n=\frac{1^2}{2^3+n^3}+\frac{2^2}{4^3+n^3}+\frac{3^2}{6^3+n^3}+...+\frac{n^2}{(2n)^3+n^3}$ ចូរសរសេរ u_n ជារាង $u_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$ រួចគណនា $\lim_{n\to\infty}u_n$

ចម្លើយ

$$1)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+3^k+...+n^k}{n^{k+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^k+2^k+3^k+...+n^k}{n^k}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^k+\left(\frac{2}{n}\right)^k+\left(\frac{3}{n}\right)^k+...+\left(\frac{n}{n}\right)^k\right]$$

គេយក $[0,1]$ ចែកជា n ចំណែកតូចៗស្មើគ្នាដោយស្ទុីតកំណត់ $0=x_0<x_1<x_2<....<x_{n-1}<x_n=1$

យើងបាន

$$x_0=0+\frac{1-0}{n}(0)=0\ , x_1=0+1\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}\ , ..., x_n=0+n\frac{1-0}{n}=\frac{n}{n}$$

ដូចនេះយើងបាន $\left(\frac{1}{n}\right)^k+\left(\frac{2}{n}\right)^k+\left(\frac{3}{n}\right)^k+...+\left(\frac{n}{n}\right)^k=\sum_{k=1}^{n}(x_i)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k$

ហើយ $\Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$

ដូចនេះ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\left(\frac{1}{n}\right)^k+\left(\frac{2}{n}\right)^k+\left(\frac{3}{n}\right)^k+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^k]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad ,f(x_i)=\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$=\int_0^1 x^k dx$$

$$=\frac{x^{k+1}}{k+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{k+1}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}(\frac{1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}})=\frac{1}{k+1}$

$$2)\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}) ,(x_1=\frac{1}{n},x_2=\frac{2}{n},\ldots.,x_n=\frac{n}{n})$$

គេយក $[0,1]$ ចែកជា n ចំណែកតូចៗស្មើគ្នាដោយស្មឹតកំណត់ $0=x_0<x_1<x_2<\ldots.<x_{n-1}<x_n=1$ យើងបាន

$$x_0=0+\frac{1-0}{n}(0)=0\ ,x_1=0+1\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}\ ,\ \ldots\ldots.,x_n=0+n\frac{1-0}{n}=\frac{n}{n}$$ ហើយ $\Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n}(\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \quad ,(f(x_k)=\frac{1}{1+x_k})$$

$$=\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\ln|1+x|\Big|_0^1$$

$$=\ln 2$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n})=\ln 2$

$$3)\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+x_1^{\,2}}+\frac{1}{1+x_2^{\,2}}+\frac{1}{1+x_3^{\,2}}+\ldots+\frac{1}{1+x_n^{\,2}}) ,(x_1=\frac{1}{n},x_2=\frac{2}{n},\ldots.,x_n=\frac{n}{n})$$

គេយក $[0,1]$ ចែកជា n ចំណែកតូចៗស្មើគ្នាដោយស្មុីតកំណត់ $0=x_0<x_1<x_2<....<x_{n-1}<x_n=1$

យើងបាន

$$x_0=0+\frac{1-0}{n}(0)=0\ ,x_1=0+1\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}\ ,\ ....,x_n=0+n\frac{1-0}{n}=\frac{n}{n}\quad \text{ហើយ}\ \Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+x_1^{\ 2}}+\frac{1}{1+x_2^{\ 2}}+\frac{1}{1+x_3^{\ 2}}+...+\frac{1}{1+x_n^{\ 2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k^{\ 2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\cdot\Delta x\quad ,(f(x_k)=\frac{1}{1+x_k^{\ 2}})$$

$$=\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\text{Arctan}\,x\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

4) សរសេរ u_n ជារាង $u_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$ រួចគណនា $\lim_{n\to\infty}u_n$

គេមាន

$$u_n=\frac{1^2}{2^3+n^3}+\frac{2^2}{4^3+n^3}+\frac{3^2}{6^3+n^3}+...+\frac{n^2}{(2n)^3+n^3}$$

$$=\frac{n^2}{n^3}\left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{2}{n}\right)^3+1}+\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{\left(\frac{4}{n}\right)^3+1}+\frac{\left(\frac{3}{n}\right)^2}{\left(\frac{6}{n}\right)^3+1}+....+\frac{\left(\frac{n}{n}\right)^2}{\left(\frac{2n}{n}\right)^3+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{8\left(\frac{1}{n}\right)^3+1}+\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{8\left(\frac{2}{n}\right)^3+1}+\frac{\left(\frac{3}{n}\right)^2}{8\left(\frac{3}{n}\right)^3+1}+....+\frac{\left(\frac{n}{n}\right)^2}{8\left(\frac{n}{n}\right)^3+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{x_1^{\ 2}}{8x_1^{\ 3}+1}+\frac{x_2^{\ 2}}{8x_2^{\ 3}+1}+\frac{x_3^{\ 2}}{8x_3^{\ 3}+1}+....+\frac{x_i^{\ 2}}{8x_i^{\ 3}+1}\right)\quad ,\left(x_i=\frac{i}{n}\ ,i=1,2,3.....,n\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\quad ,\left(f(x_i)=\frac{x_i}{8x_i+1}\ ,\ i=1,2,3,....,n\right)$$

ដូចនេះ $u_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$

- គណនាលីមីត $\lim_{n\to\infty}u_n$ ។

  គេយក $[0,1]$ ចែកជា n ចំណែកតូចៗស្មើគ្នាដោយស្មុីតកំណត់ $0=x_0<x_1<x_2<....<x_{n-1}<x_n=1$

  យើងបាន

$x_0 = 0 + \frac{1-0}{n}(0) = 0$, $x_1 = 0 + 1\frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$, ..., $x_n = 0 + n\frac{1-0}{n} = \frac{n}{n}$ ហើយ $\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

យើងបាន

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(\frac{1}{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

$$= \int_0^1 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{8x^3+1}dx$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^1 \frac{(8x^3+1)'}{8x^3+1}dx$$

$$= \frac{1}{24}\ln|8x^3+1|\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{24}\ln 3 = \frac{1}{12}\ln 3$$

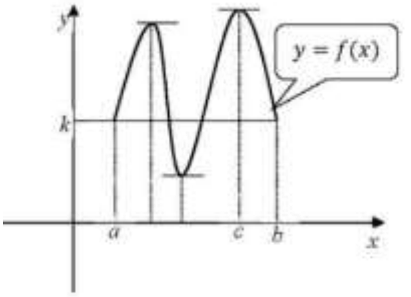
ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{12}\ln 3$

ចំណេះដឹងបន្ថែម

ទ្រឹស្តីបទ Rolle (Rolle Theorem)

គេមានអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយមានដេរីវេលើចន្លោះ $]a,b[$ ។

បើគេមាន $f(a) = f(b)$ នោះមាន $c \in]a,b[$, $f'(c) = 0$



សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $f(a) = f(b) = k$

$i)$ បើ $f(x) = k$, $\forall x \in [a,b]$ នោះ f ជាអនុគមន៍ថេរលើចន្លោះ $[a,b]$ ។

យើងបាន

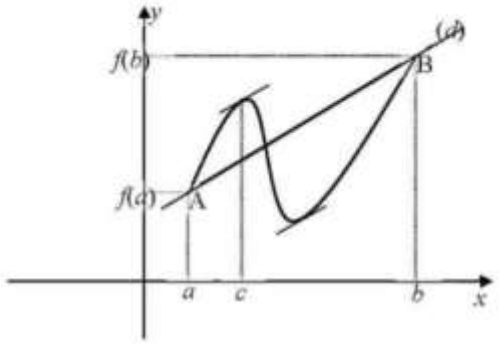
$$f'(x) = 0 \;,\; \forall x \in]a,b[$$

$ii)$ បើ $\exists x \in]a,b[$ ដែល $f(x) \neq k$ នោះមានតម្លៃអតិបរមា ឬ អប្បបរមាធៀបនៅលើចន្លោះ $]a,b[$ មានន័យថា មានតម្លៃមួយយ៉ាងតិចនៅចន្លោះ $]a,b[$ ដែល

$f'(x) = 0$ ។

ឧបមាថា $f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់

$x = c \in]a,b[$ នោះ $f'(c) = 0$ ។



ទ្រឹស្តីបទ Lagrange (The mean value Theorem)

បើ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយមានឌីផេរ៉ង់ស្យែល លើចន្លោះ $]a,b[$ នោះមានចំណុច $\exists c \in]a,b[$ ដែល

$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $A(a, f(a))$ និង $B(b, f(b))$

សមីការបន្ទាត់ d កាត់តាម A និង B មានរាង

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

តាង $g(x)$ ជាផលដករវាង $f(x)$ និង y

យើងបាន $g(x) = f(x) - y = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$

- បើ $x = a$ នោះ $g(a) = 0$
- បើ $x = b$ នោះ $g(b) = f(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = 0$

ដូចនេះ $g(a) = g(b)$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle ចំពោះអនុគមន៍ g យើងបាន $\exists c \in]a,b[$ ដែល $g'(c) = 0$

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ដោយ $g'(c) = 0$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

រូបមន្ត Newton-Leibniz

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \text{ ដែល } F \text{ ជាព្រីមីទីវនៃ } f$$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងចែកអង្កត់ $[a,b]$ ចែកជា n ចំណែកតូចៗស្មើគ្នាដោយស្ទីតកំណត់ $a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_{n-1} < x_n = b$

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= F(x_n)-F(x_0) \\ &= F(x_n)-F(x_{n-1})+F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+...+F(x_2)-F(x_1)+F(x_1)-F(x_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(F(x_k)-F(x_{k-1})\right) \end{aligned}$$

តាមទ្រឹស្តីបទ Lagrange បើមាន $c_k = [x_k, x_{k-1}]$ យើងបាន

$$F'(c_k) = \frac{F(x_k)-F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

F ជាព្រីមីទីវនៃ f នោះ $F'(c_k) = f(c_k)$

តាង $\Delta x = x_k - x_{k-1}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(F(x_k)-F(x_{k-1})) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{F(x_k)-F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} F'(c_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x \end{aligned}$$

ដោយ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x)\cdot\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}(F(b)-F(a)) = f(b)-f(a)$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x)\cdot\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

៤.២.លក្ខណៈអាំងតេក្រាលកំណត់

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\forall k \in \mathbb{R} \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a<c<b)$

5) $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមរូបមន្ត Newton-Leinitz $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ដែល F ជាព្រីមីទីវនៃ f

1) $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

ដូចនេះ $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\forall k \in 3 \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

$$k\int_a^b f(x)\,dx = k\left(F(b) - F(a)\right)$$
$$= kF(b) - kF(a)$$
$$= \int_a^b kf(x)dx$$

ដូចនេះ $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
$$= -\left(F(a) - F(b)\right)$$
$$= -\int_b^a f(x)\,dx$$

ដូចនេះ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a < c < b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
$$= F(b) - F(c) + F(c) - F(a)$$
$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)dx$$

ដូចនេះ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a < c < b)$

5) $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)dx$

$$\oplus\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$\oplus\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx = F(b)-G(b)-F(a)+G(a)$ $(F, G$ ជាព្រីមីទីវរៀងគ្នានៃ $f, g)$

$$= F(b)-F(a)-\left(G(b)-G(a)\right)$$

$$= \int_a^b (x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\oplus\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\oplus\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = F(b)+G(b)-F(a)-G(a)$$

$$= F(b)-F(a)+\left(G(b)-G(a)\right)$$

$$= \int_a^b (x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

ដូចនេះ $\int_a^b \left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

រូបមន្ត $\int_a^b F'(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$

ដោយ F ជាព្រីមីទីវនៃ f នោះយើងបាន

$F'(x) = f(x)$

តាមនិយមន័យនៃព្រីមីទីវ យើងបាន

$$\int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= F(x)\Big|_a^b$$

$$= F(b)-F(a)$$

ដូចនេះ $\int_a^b F'(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$

រូបមន្តប្តូរអថេរ

បើ g ជាប់លើ $[a,b]$ និងមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះបើក $]a,b[$ នោះ

$\int_a^b F'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_a^b$ ដែល F ជាព្រីមីទីវនៃ f ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ F ជាព្រីមីទីវនៃ f នោះយើងបាន

$F'(g(x))g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_a^b F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_a^b$$

ដូចនេះ $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_a^b$

តាង $u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx$

$\oplus$ បើ $x = a \Rightarrow u = g^{-1}(a)$

$\oplus$ បើ $x = b \Rightarrow u = g^{-1}(b)$

ដូចនេះ $\int_a^b f(g(x))dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(u)du \qquad (u = g(x))$

រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

បើ f និង g សុទ្ធតែជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះ $]a,b[$ នោះ

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x)_a^b - \int_a^b g(x)\cdot f'(x)dx$$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))'\,dx = \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx + \int_a^b g(x)\cdot f'(x)dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx + \int_a^b g(x)\cdot f'(x)dx = f(x)\cdot g(x)_a^b$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x)_a^b - \int_a^b g(x)\cdot f'(x)dx$$

ដូចនេះ $\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x)_a^b - \int_a^b g(x)\cdot f'(x)dx$

ទ្រឹស្តីបទទី១

បើ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x = \lim_{x\to\infty}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right)\Delta x$

ដោយ $\left|f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right| \le \left|f(x_1)\right| + \left|f(x_2)\right| + \ldots + f(x_n)$

$$\left|f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right|\Delta x \le \left(\left|f(x_1)\right|+\left|f(x_2)\right|+\ldots+\left|f(x_n)\right|\right)\Delta x \qquad \left(\Delta x = \frac{b-a}{n} > 0\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left|f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right|\Delta x \le \lim_{x\to\infty}\left|f(x_1)\right|+\left|f(x_2)\right|+\ldots+\left|f(x_n)\right|\Delta x$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right|\cdot\Delta x \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)\right|\cdot\Delta x$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

ដូចនេះបើ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

ទ្រឹស្តីបទទី២

1) បើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយ $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$ នោះ $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

2) បើ f និង g ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយ $f(x)\leq g(x)$ នោះ $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

សម្រាយបញ្ជាក់

3) បើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយ $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$ នោះ $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

យើងយកអង្កត់ $[a,b]$ ចែកជា n ចំណែកតូចៗស្មើគ្នាជាស្វ៊ីតកំណត់ $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$

ហើយមានប្រវែង $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}=x_k-x_{k-1}\,(k=1,2,3,\ldots)$

នោះគេបានផលបូកនៃក្រឡាផ្ទៃចតុកោណកែងនីមួយៗគឺ

$S_n=\Delta x\cdot f(x_1)+f(x_2)+\ldots+\Delta x\cdot f(x_n)$

$=\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right)\cdot\Delta x$

ដោយ $\forall x\in[a,b], f(x)\geq 0$ នោះ $f(x_1)\geq 0,\ f(x_2)\geq 0,\ldots\ldots\ldots\ldots,\ f(x_n)\geq 0$

$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\geq 0$

$\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right)\Delta x\geq 0$

$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x\geq 0$

$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x\geq 0$

$\int_a^b f(x)dx\geq 0$

2) បើ f និង g ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយ $f(x)\leq g(x)$ នោះ $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

តាង $h(x)=g(x)-f(x)\geq 0\quad\left(f(x)\leq g(x)\right)$

នោះ $\int_a^b h(x)dx\geq 0$ (តាមទ្រឹស្តីបទ២.1)

$\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx\geq 0$

$\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx\geq 0$

$\int_a^b f(x)\leq\int_a^b g(x)dx$

ដូចនេះ f និង g ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយ $f(x)\geq g(x)$ នោះ $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

ទ្រឹស្តីបទទី៣ វិសមភាព Cauchy

បើគេមានអនុគមន៍ពីរ f និង g ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះគេបាន

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

សម្រាយបញ្ជាក់

$\forall k \in 3, \left(kf(x)+g(x)\right)^2 \ge 0$

$k^2 f^2(x) + 2kf(x)g(x) + g^2(x) \ge 0$

បើ f និង g ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទទី២យើងបាន

$$k^2\int_a^b f^2(x)dx + 2k\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \ge 0 \ (1)$$

ដើម្បីឱ្យ (1) ពិត $\forall k \in 3$ លុះត្រាតែ

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \le 0$$

$$\therefore \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

អនុវត្ត

ស្រាយថា $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx \le \frac{\sqrt{5}}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទទី៣ យើងបាន

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx\right)^2 \le \int_0^1 dx\int_0^1 \left(1+x^3\right)dx$$

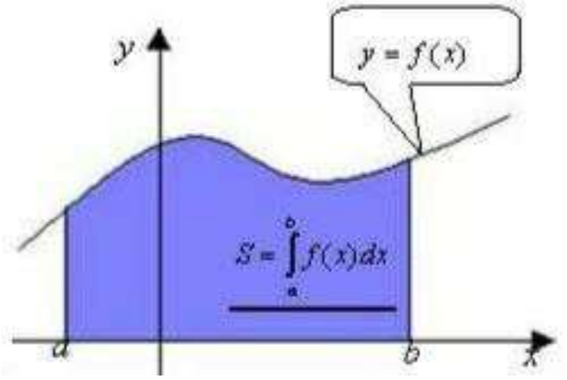
$$\le \int_0^1 \left(1+x^3\right)dx$$

$$\le \left(1+\frac{x^4}{4}\right)_0^1$$

$$\le 1+\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx \le \frac{\sqrt{5}}{2}$

៤.៣.គណនាក្រឡាផ្ទៃ



បើគេមានអនុគមន៍ $y = f(x) \ge 0$ និងជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ

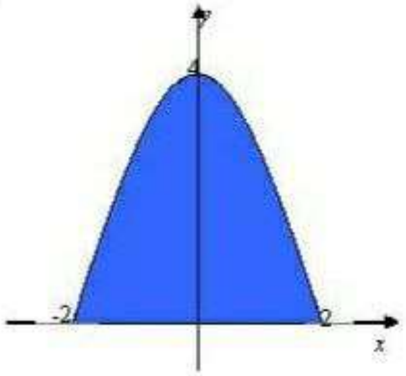
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

ឧទាហរណ៍ទី៣

រកផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយខ្សែកោង y

ដោយ $\forall x\in[-2,2],\ f(x)=4-x^2\geq 0$ នោះ

$$s=\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx$$



ក្រឡាផ្ទៃ $=4x-\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2}$

$$=4.2-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}=\frac{32}{3}$$

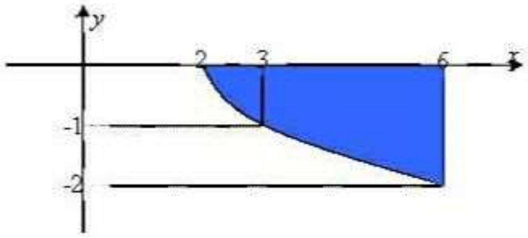
ដូចនេះក្រឡាផ្ទៃ $s=\frac{32}{3}$ ឯកតាផ្ទៃ

បើគេមានអនុគមន៍ $y=f(x)\leq 0$ និងជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ

$\forall x\in[a,b],\ f(x)\geq 0$ គេបានក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $s=-\int_{a}^{b}f(x)dx$

ឧទាហរណ៍ទី៤

រកក្រឡាផ្ទៃកំណត់ដោយខ្សែកោង $y=-\sqrt{x-2}$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសលើចចន្លោះ $[2,6]$ ។



$$S=-\int_{2}^{6}-\sqrt{x-2}dx$$

$$=\int_{2}^{6}\sqrt{x-2}dx=\int_{2}^{6}\sqrt{x-2}d\left(x-2\right)$$

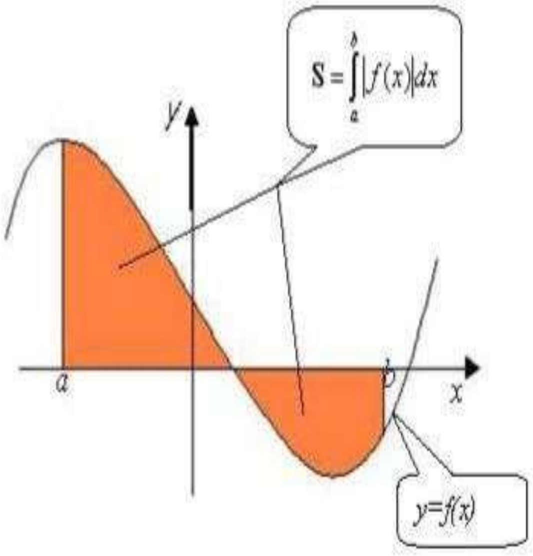
$$=\left.\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_{2}^{6}=\left.\frac{2(x-2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_{2}^{6}$$

$$=\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-0\right)=\frac{16}{3}$$

ដូចនេះ $S=\frac{16}{3}$

ជាទូទៅ

បើគេមានអនុគមន៍ $y=f(x)$ ដែលមាន ខ្សែកោង (C) ជៀបនឹងអ័ក្ស (ox) ហើយខណ្ឌ ដោយបន្ទាត់ $x=a, x=b$ ។ គេបានក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់រវាង ខ្សែកោងនិង (ox) ក្នុង $[a,b]$ គឺ $S=\int_a^b\left|f(x)\right|dx$ ។



ឧទាហរណ៍ទី៥

រកផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយខ្សែកោង (C) តាងដោយ $y=f(x)=4-x^2$ អាប់ស៊ីសលើ $[-2,3]$

ខ្សែកោង (C) តាង $y=4-x^2$ កាត់ (ox) ត្រង់ $x=-2, x=2$ ។

$$S=\int_{-2}^{2}\left|f(x)\right|dx$$

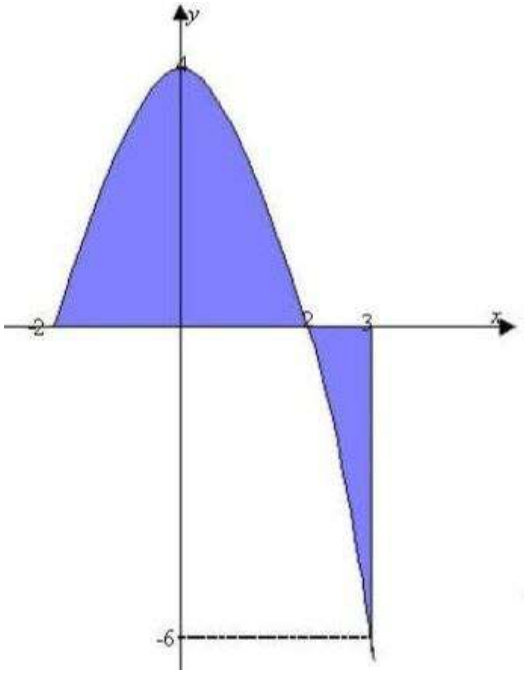
$$=\int_{-2}^{2}\left|4-x^2\right|dx+\int_{2}^{3}\left|4-x^2\right|dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx-\int_{2}^{3}\left(4-x^2\right)dx$$

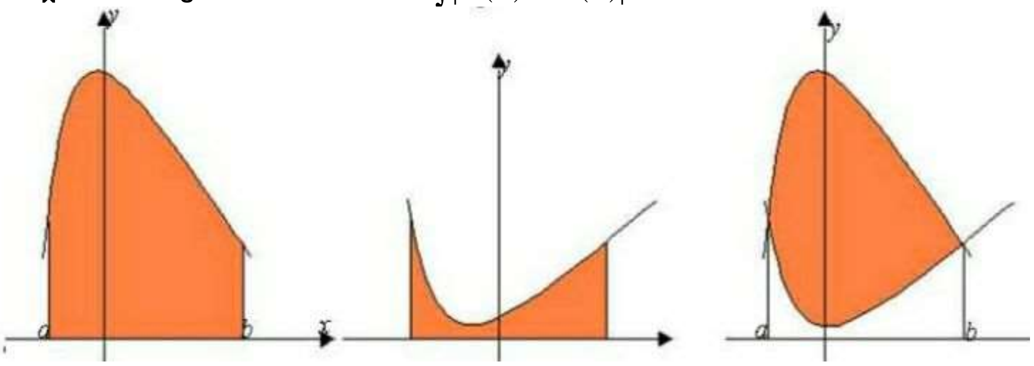
$$=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}-\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{2}^{3}$$

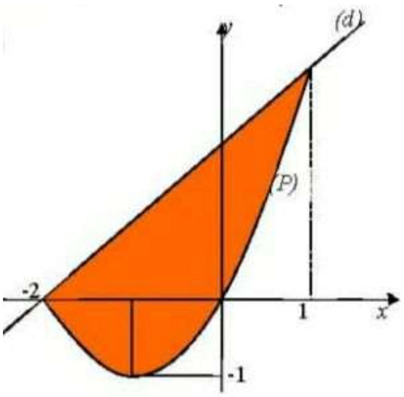
$$=8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}-12+\frac{27}{3}+8-\frac{8}{3}=13$$

ដូចនេះ $S=13$



⊕ បើ f និង g ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយ $f\le g$ នោះ ក្រឡាផ្ទៃដែលកើតឡើងដោយខ្សែកោងទាំងពីរគឺ $S=\int_a^b\left|g(x)-f(x)\right|dx$





គណនាក្រឡាផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $(p): y = x^2 + 2x$ និងបន្ទាត់ $(d): y = x + 2$ ដោយខ្សែកោងនិងបន្ទាត់ប្រសព្វគ្នាត្រង់ $x = -2, x = 1$ ហើយ $\forall x \in [-2,1]$ សមីការបន្ទាត់ (d) នៅលើប៉ារ៉ាបូល (p) នោះយើងបាន

$$S = \int_{-2}^{2} \left[(x-2) - (x^2 + 2x) \right] dx$$

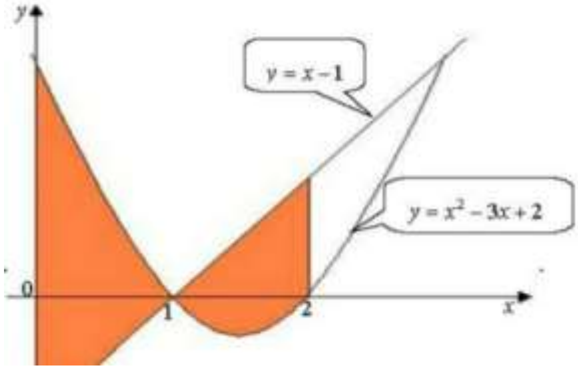
$$= \int_{-1}^{2} (2 - x - x^2) dx$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{9}{2}$$

ដូចនេះ $S = \frac{9}{2}$

អនុវត្ត



គណនាក្រឡាផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $(p): y = x^2 - 3x + 1$ និងបន្ទាត់ $(d): y = x - 1$ និងបន្ទាត់ $x = 0, x = 2$ សមីការអាប់ស៊ីសរវាង (p) និង (d)

គឺ $x^2 - 3x + 2 = x - 1$

$(x-1)(x-3) = 0$

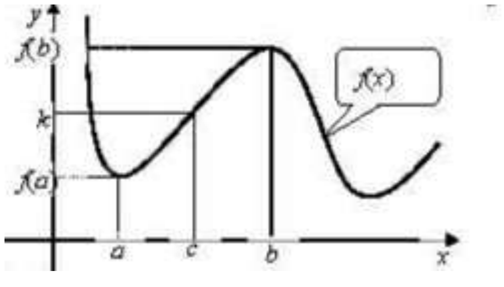
ដូចនេះក្រឡាផ្ទៃ A គឺ

$$\text{A} = \int_{0}^{1} (x^2 - 4x + 3) dx + \int_{1}^{2} (-x^2 + 4x - 3) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \Big|_{0}^{1} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \Big|_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{3} - 2 + 3 - \frac{8}{3} + 8 - 6 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = 2$$

ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល (*Intermediate Value Theorem*)



បើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយមានតម្លៃ k មួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ $\left(f(a) \le k \le f(b) \right)$ នោះមានចំនួន $\exists c \in [a,b]$ ដែល $f(c) = k$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $g(x)=f(x)-k$ យើងបាន

$\oplus x=a$ នោះ $g(a)=f(a)-k\le 0 \quad (f(a)\le k)$

$\oplus x=b$ នោះ $g(b)=f(b)-k\ge 0 \quad (f(b)\ge k)$

ដូចនេះ $g(x)$ អាចស្មើសូន្យត្រង់ចំណុចណាមួយនៅលើចន្លោះ $[a,b]$

ឧបមាថា $g(x)=0$ ត្រង់ $c\in[a,b]$ នោះ

$g(c)=f(c)-k=0,\ f(c)=k$

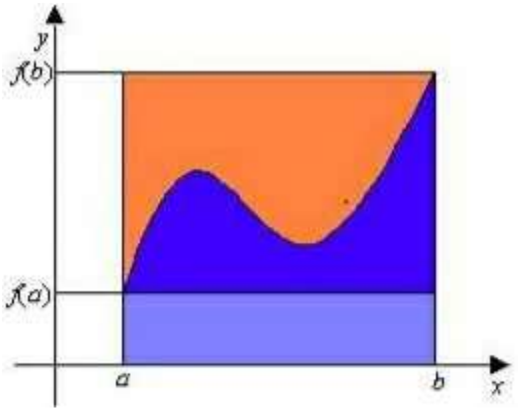
ដូចនេះបើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយមានតម្លៃ k មួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ $(f(a)\le k\le f(b))$

នោះមានចំនួន $\exists c\in[a,b]$ ដែល $f(c)=k$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៤ តម្លៃមធ្យមនៃអាំងតេក្រាល *(Mean Value Theorem for Integral)*

បើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ នោះមានចំនួន $c\in[a,b]$

ដែល $\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot f(c)$ ។



1.បើ f ជាអនុគមន៍ថេរលើ $[a,b]$ នោះមាន c នៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។

2.បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ នោះ f មានអតិបរមានិងអប្បបរមាលើ $[a,b]$

តាង $m=f(a)$ ជាតម្លៃអប្បបរមានៃ f

តាង $M=f(b)$ ជាតម្លៃអតិបរមានៃ f

យើងបាន

$$m\le f(x)\le M$$

$$m\int_a^b dx\le\int_a^b f(x)dx\le M\int_a^b dx$$

$$(b-a)m\le\int_a^b f(x)dx\le(b-a)M$$

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

បើ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b],\ f(a)\le k\le f(b)$ នោះមាន $c\in[a,b],\ f(c)=k$ ។

ដូចនេះមាន $c\in[a,b],\ f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$$\therefore\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$$

អនុវត្ត

ល្បឿនសំឡេង $S(x)$ គិតជា $\frac{m}{s}$ មានសមីការ

$$S(x)=\begin{cases} -4x+341\,, 0\le x\le 11,5 \\ 295 \qquad ,11,5\le x\le 22 \\ \frac{3}{4}x+278,5 \ \ ,22\le x\le 32 \\ \frac{3}{2}x+254,5 \ \ ,32\le x\le 50 \\ -\frac{3}{2}x+404,5 \ \ ,50\le x\le 80 \end{cases}$$

ដែល x គឺជាកម្ពស់គិតជា km ចូរគណនាល្បឿនមធ្យមលើចន្លោះ $[0,80]$

សម្រាយបញ្ជាក់

$$+\int_0^{11.5} S(x)dx=\int_0^{11.5}(-4x+341)\,dx=3657$$

$$\int_{11.5}^{22} S(x)\,dx=\int_{11.5}^{22} 295dx=3097,5$$

$$+\int_{32}^{50} S(x)\,dx=\int_{32}^{50}\left(-\frac{3}{2}x+254,5\right)dx=5688$$

$$+\int_{50}^{80} S(x)\,dx=\int_{50}^{80}\left(\frac{3}{2}x+404.5\right)dx=9210$$

$$+\int_0^{80} S(x)\,dx=24640$$

ល្បឿនមធ្យមនៃសំឡេងគឺ $\frac{1}{80}\int_0^{80} S(x)\,dx=\frac{24640}{80}=308\,{}^{km}\!/_{s}$

ទ្រឹស្តីបទទី៥

បើ f ជាប់លើចន្លោះ I ដែលមាន a នោះ $\forall x$ ក្នុងចន្លោះ I យើងបាន $\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)=f(x)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $F(x)=\int_a^b f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{\Delta x+x}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{a}f(t)dt+\int_a^{\Delta x+x}f(t)dt\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{\Delta x+x}f(t)dt$$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមនៃអាំងតេក្រាល យើងបាន

$c\in[x,x+\Delta x],\Delta x\to 0\Rightarrow c\to x$

$$\int_x^{\Delta x+x}f(x)dx=(x+\Delta x-x)f(c)=\Delta xf(c)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{\Delta x+x}f(t)dt=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(f(c)\Delta x\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(c)$$

$$=f(x)$$

ដូចនេះ $\Delta x>0\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)$

អនុវត្ត

1)គណនា $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt\right)$

2)គណនាដេរីវេ $F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^3}\cos tdt$

សម្រាយបញ្ជាក់

1)គណនា $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt\right)$

ដោយ $f(t)=\sqrt{1+t^2}$ ជាប់លើ 3នោះតាមទ្រឹស្តីបទទី៥ យើងបាន

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt\right)=\sqrt{1+x^2}$$

2)គណនាដេរីវេ $F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^3}\cos tdt$

ដោយ $f(t)=\cos t$ ជាប់លើ 3នោះតាមទ្រឹស្តីបទទី៥ យើងបាន

តាង $u=x^3$

$$F'(x)=\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{d}{du}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^3}\cos t\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\cos u\left(3x^2\right)$$

$$=3x^2\cos x^3$$

ដូចនេះ $F'(x)3x^2\cos x^3$

ទ្រឹស្តីបទទី៦ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍គូ និងសេស

គេឱ្យ f មានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះ $[-a,a]$ នោះ

1)បើ f ជាអនុគមន៍សេសនោះ $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

2)បើ f ជាអនុគមន៍សេសនោះ $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$

សម្រាយបញ្ជាក់

1)បើ f ជាអនុគមន៍សេសនោះ $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_{-a}^{a} f(-x)dx+\int_{-a}^{0} f(x)dx$$

ដោយ f ជាអនុគមន៍សេសនោះ $f(-x)=-f(x)$

តាង $u=-x\Rightarrow du=-dx$

$x=0\to u\to 0$

$x=-a\to u\to a$

$$-\int_{-a}^{a} f(-x)dx=\int_{a}^{0} f(u)du$$

$$=\int_{a}^{0} f(x)dx$$

$$=-\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$=-\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$=0$$

ដូចនេះបើ f ជាអនុគមន៍សេសនោះ $\int_{-a}^{a} f(x)=0$

2)បើ f ជាអនុគមន៍សេសនោះ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

ដោយ f ជាអនុគមន៍គូនោះ $f(-x) = f(x)$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(-x)dx$$

តាង $u = -x \Rightarrow u - du = dx$

$$\int_{-a}^{a} f(-x)dx = -\int_{a}^{0} f(u)du$$

$$= \int_{0}^{a} f(u)du$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

ដូចនេះបើ f ជាអនុគមន៍គូនោះ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

អនុវត្ត

គណនា $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3 x\cos x + \sin x\cos x\right)dx$

តាង $f(x) = \sin^3 x\cos x + \sin x\cos x$

$f(-x) = -\sin^3 x\cos x - \sin x\cos x$

តាង $= -\left(\sin^3 x\cos x + \sin x\cos x\right)$

$= -f(x)$

នោះ f ជាអនុគមន៍សេស

តាមទ្រឹស្តីបទទី៦ យើងបាន $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3 x\cos x + \sin x\cos x\right)dx = 0$

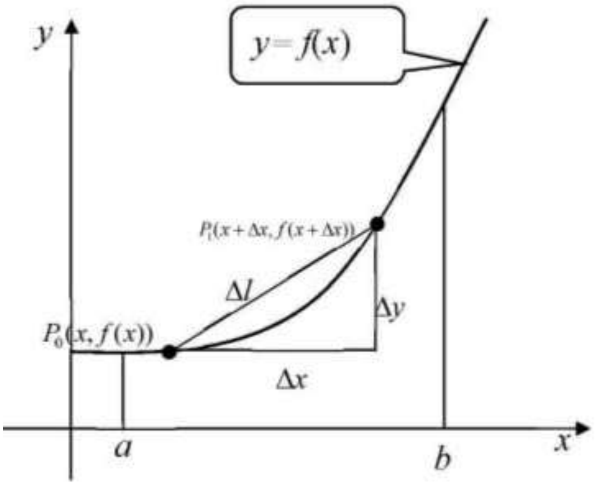
៤.៤.គណនាប្រវែងខ្សែកោង

តាង L ជាប្រវែងខ្សែកោងនៃ $f(x)$ ដែល $a \le x \le b$ ។

តាង $y = f(x)$ មានដេរីវេនិងជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ។

$P_0(x, f(x))$ និង $a \le x < x+\Delta x \le b$

ប្រវែង $P_0P_1 = \Delta l$ ត្រូវបានបញ្ជាក់ដោយ



$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + \left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]^2}$$

ដោយតាង $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$$= \sqrt{\left(1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)\cdot(\Delta x)^2}$$

$$= \sqrt{\left(1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)}\cdot \Delta x$$

$$dl = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx$$

ប្រសិនបើយើងកំណត់ $x = a$ ទៅ $x = b$ យើងបានប្រវែង l

ដូចនេះ $L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$$= \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

បើ x និង y ត្រូវបានបញ្ជាក់ដោយប៉ារ៉ាម៉ែត t ; $x = f(t)$ ហើយ $y = g(t)$ ដែល $a \le t \le b$ គេបាន

ប្រវែងខ្សែកោង $L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)^2}\, f'(t)$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}\,dt$$

សម្គាល់

នៅក្នុងការគណនាយើងប្រើ

$\oplus\ \Delta x$ សម្រាប់កំណើន (finite increment)

$\oplus\ dx$ សម្រាប់កំណើនតូចបំផុត (infinitesimal increment)

ជាទូទៅ

1) ប្រវែងខ្សែកោង L នៃអនុគមន៍ចំពោះ $a \le x \le b$ អាចគណនាដោយ $L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$

2) ប្រវែងខ្សែកោង L នៃ $x = f(t)$ និង $y = g(t)$ ចំពោះ $a \le t \le b$ អាចគណនាដោយ

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}\,dt$$

អនុវត្ត

1)គណនាប្រវែងខ្សែកោងនៃ $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$ នៅលើ $\left[\frac{1}{2},2\right]$

2)គណនាប្រវែងខ្សែកោង $x=3t^2$, $y=3t-t^3$ $\left(-\sqrt{3}\le t\le\sqrt{3}\right)$

ចម្លើយ

1)គណនាប្រវែងខ្សែកោងនៃ $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$ នៅលើ $\left[\frac{1}{2},2\right]$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)$$

ដូចនេះ $L=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{4+x^4-2+\frac{1}{x^4}}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{6}+\frac{47}{24}\right)=\frac{33}{16}$$

2)គណនាប្រវែងខ្សែកោង $x=3t^2$, $y=3t-t^3$ $\left(-\sqrt{3}\le t\le\sqrt{3}\right)$

$x=3t^2 \quad ,dx=6tdt$

$y=3t-t^3 \quad ,dy=\left(3-3t^2\right)dt$

$$L=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4t^2+1-2t^2+t^4}dt=3\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$=3\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(1+t^2\right)dt=3t+t^3\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

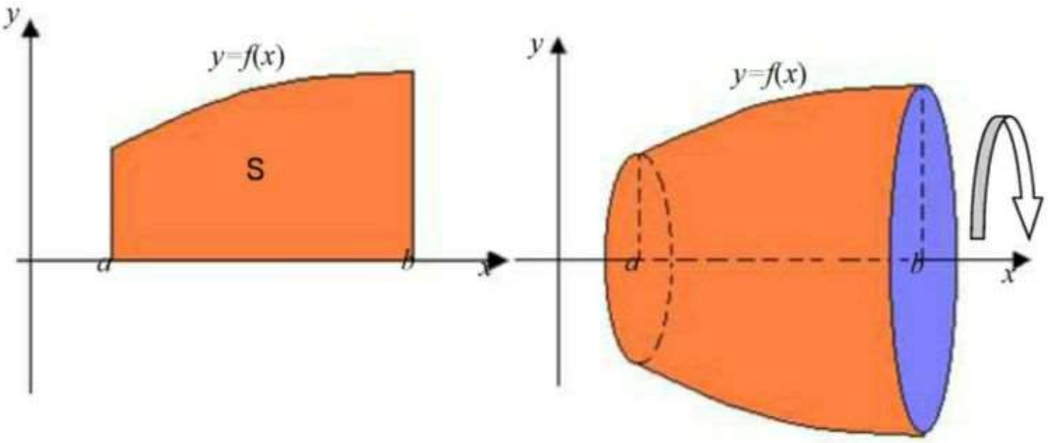
$$=3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}$$

$$=12\sqrt{3}$$

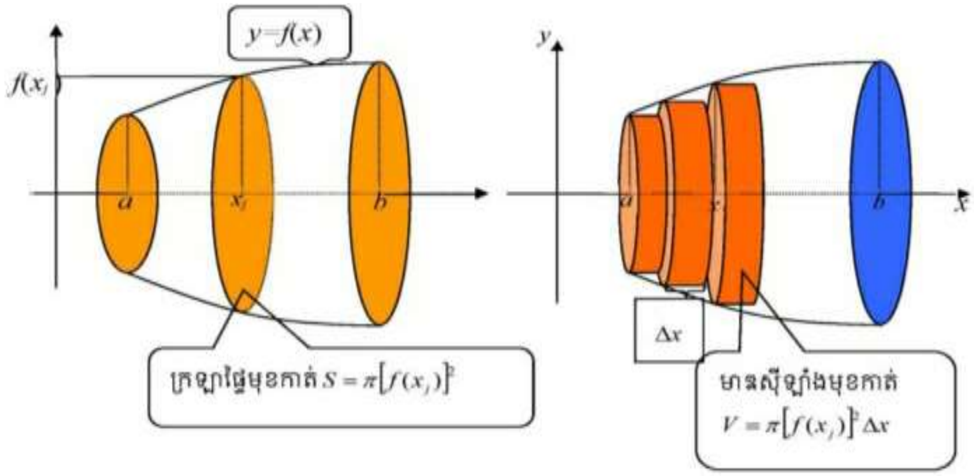
ដូចនេះ $L=12\sqrt{3}$ ។

៤.៥.គណនាមាឌ

គេឱ្យ $y=f(x)$ ជាប់លើ $[a,b]$ ។ បើ S ជាផ្ទៃកដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាង $y=f(x)$ និងអ័ក្ស (ox) លើចន្លោះ $[a,b]$ វិលជុំវិញ $(x'ox)$ គេបានរូបសូលីតដូចខាងក្រោម



តាមរូបខាងលើ គេដឹងថាមុខកាត់សូលីតមានរាងជាថាសហើយថាសនីមួយៗមានកាំស្មើនឹង $f(x)$ ។
គេចែក $[a,b]$ ជា n ចំណែកស្មើៗគ្នា $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b \,;\, \Delta x = x_j - x_{j-1} = \dfrac{b-a}{n}$
បើនោះមុខកាត់សូលីតជាស៊ីឡាំងហើយមានកាំស្មើនឹង $f(x_j)$ មានកម្ពស់ Δx ។
គេបានមាឌនៃមុខកាត់គឺ $V = \pi\left[f(x_j)\right]^2 \Delta x$



យើងបានមាឌស៊ីឡាំងមុខកាត់នីមួយៗដែលមានកាំស្មើនឹង $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ រៀងគ្នានិងកម្ពស់ Δx
គឺ $\pi\left[f(x_o)\right]^2 \Delta x + \pi\left[f(x_1)\right]^2 \Delta x + \pi\left[f(x_2)\right]^2 \Delta x + ... + \pi\left[f(x_n)\right]^2 \Delta x = \sum_{j=0}^{n} \pi\left[f(x_j)\right]^2 \Delta x$
នោះ $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \pi\left[f(x_1)\right]^2 \Delta x$ កំណត់ជាអាំងតេក្រាលកំណត់លើ $[a,b]$ អាំងតេក្រាលនេះជាមាឌនៃសូលីតបរិវត្ត។

ជាទូទៅ

បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់លើ $[a,b]$ នោះមាឌសូលីតដែលកកើតពីការបង្វិលនៃផ្ទៃដែលកំណត់ដោយអ័ក្ស $(x'ox)$ លើ $[a,b]$ ជុំវិញ $(x'ox)$ កំណត់ដោយ $V = \int_a^b \left[\pi f(x)\right]^2 dx$

ឧទាហរណ៍ទី៧ គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តដែលកំណត់ដោយអនុគមន៍ $y = x - 1$ និងអ័ក្ស $(x'ox)$ លើ $[1,3]$ វិលជុំវិញអ័ក្ស $(x'ox)$ ។

គេបាន $V=\int_1^3 \pi\left[f(x)\right]^2 dx$

$$=\pi\int_1^3 (x-1)^2 dx$$

$$=\pi\int_1^3 (x-1)^2 d(x-1)$$

$$=\pi\frac{1}{3}(x-1)^2\Big|_1^3=\frac{8}{3}\pi$$

ដូចនេះ $V=\frac{8}{3}\pi$

ឧទាហរណ៍ទី៨

1)គណនាមាឌសូលីតដែលកើតឡើងដោយខ្សែកោង(C)តាងឱ្យអនុគមន៍ $y=\sqrt{x}\,(x\geq 0)$ខណ្ឌដោយ $(x'ox)$

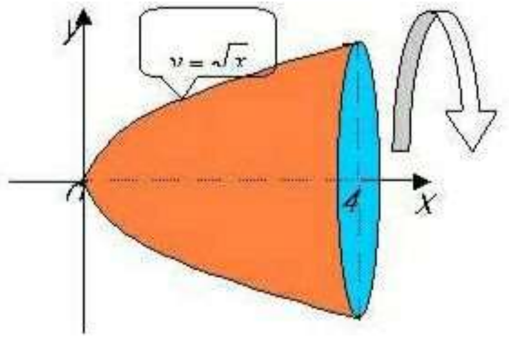
លើ$[0,4]$វិលជុំវិញអ័ក្ស$(x'ox)$ ។

2)គណនាមាឌសូលីតដែលកើតឡើងដោយ $y=\frac{1}{2}x$ លើចន្លោះ$[0,4]$វិលជុំវិញអ័ក្ស$(x'ox)$ ។

3)គណនាផលសងរវាងមាឌសំណួរទី1និងមាឌសូលីតសំណួរទី2 ។

ចម្លើយ

1)គណនាមាឌសូលីតដែលកើតឡើងដោយខ្សែកោង(C)តាងឱ្យអនុគមន៍ $y=\sqrt{x}\,(x\geq 0)$ខណ្ឌដោយ $(x'ox)$



លើ$[0,4]$វិលជុំវិញអ័ក្ស$(x'ox)$ ។

គេបាន $V_1=\int_0^4 \pi\left[f(x)\right]^2 dx$

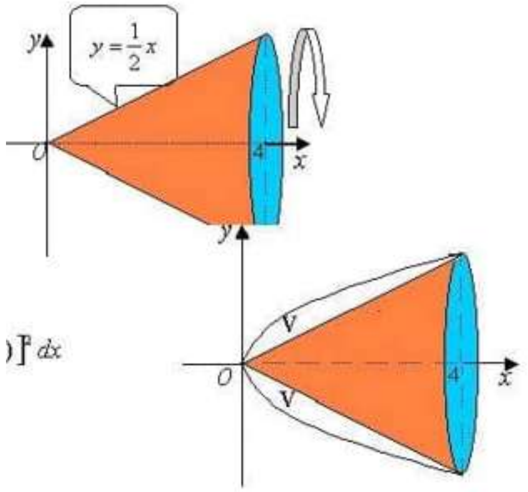
$$=\pi\int_0^4\left(\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$=\frac{\pi}{2}x^2\Big|_0^4=8\pi$$

ដូចនេះមាឌសូលីត$V_1=8\pi$ ។

2) គណនាមាឌសូលីតដែលកើតឡើងដោយ $y=\frac{1}{2}x$

លើចន្លោះ $[0,4]$ វិលជុំវិញ $(x'ox)$ ។



គេបាន $V_2=\int_0^4 \pi\left[g(x)\right]^2 dx$

$=\pi\int_0^4\left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx=\frac{\pi}{4}\int_0^4 x^2dx$

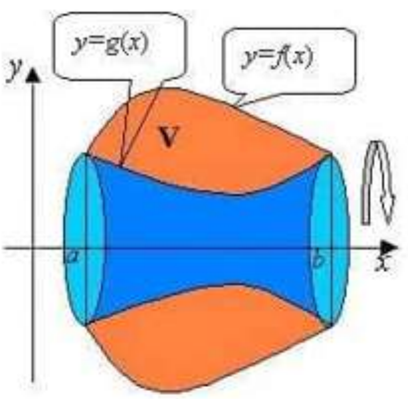
$=\frac{\pi}{12}x^3\Big|_0^4=\frac{16\pi}{3}$

ដូចនេះ $V_2=\frac{16\pi}{3}$

3) គណនាផលសងរវាងមាឌសំណួរទី1) និងមាឌសំណួរទី 2)

គេបាន $V=V_1-V_2$

ដោយ $V_1=\int_0^4\pi\left[f(x)\right]^2dx\quad ,V_2=\int_0^4\pi\left[g(x)\right]^2dx$



នោះ $V=\int_0^4\pi\left[f(x)\right]^2dx-\int_0^4\pi\left[g(x)\right]^2dx$

$=\int_0^4\pi\left[\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right]dx$

$=\pi\int_0^4\left[\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right]dx$

$=8\pi-\frac{16}{3}\pi$

$=\frac{8}{3}\pi$

ដូចនេះ $V=\frac{8}{3}\pi$

ជាទូទៅ

មាឌនៃសូលីតដែលកើតឡើងដោយការវិលជុំវិញអ័ក្ស $(x'ox)$ នៃផ្ទៃដែលកំណត់ដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ លើចន្លោះ $[a,b]$ ដែល $f(x)\geq g(x)$ គឺ $V=\pi\int_a^b\left[\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right]dx$

សម្គាល់

បើគេបង្វិល $y=f(x)$ វិលជុំវិញអ័ក្ស $(y'oy)$

គេបានមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់ដោយ

$y=f(x)\ ,\ x=g(y)$

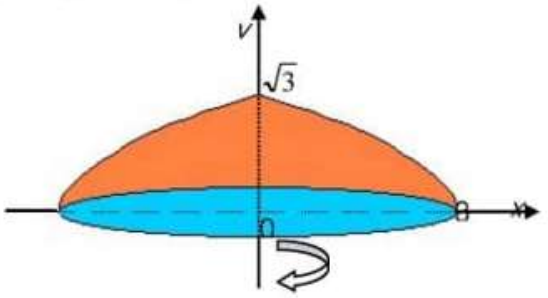
$x=a \qquad y=c$

$x=b \qquad y=d$

ដូចនេះ $V=\int_c^d\pi\left[g(y)\right]^2dy$

ឧទាហរណ៍ទី៩

រកមាឌនៃសូលីតដែលកើតឡើងដោយខ្សែកោង (c) តាងអនុគមន៍ $y=\sqrt{3-x}$ វិលជុំវិញ $(y'oy)$ លើចន្លោះ $0\le y\le\sqrt{3}$



យើងមាន $y=\sqrt{3-x}$

$$y^2=x-3$$

$$x=3-y^2$$

មាឌដែលត្រូវរកនោះ

$$V=\int_0^{\sqrt{3}}\left(3-y^2\right)^2dy$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(9-6y^2+y^4\right)dy$$

$$=\pi\left[9y-2y^3+\frac{y^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\pi\left[9\sqrt{3}-2\cdot3\sqrt{3}+\frac{9\sqrt{3}}{5}\right]$$

$$=\pi\left[3\sqrt{3}+\frac{9\sqrt{3}}{5}\right]$$

$$=\frac{24\sqrt{3}\pi}{5}$$

ដូចនេះ $V=\dfrac{24\sqrt{3}\pi}{5}$

សម្គាល់

មាឌសូលីតដោយស្គាល់មុខកាត់ (Volumes of Solids with known Cross Sections)

1) ចំពោះផ្ទៃមុខកាត់ $A(x)$ ដែលកែងនឹង $(x'ox)$, $a\le x\le b$ គេបានមាឌ $V=\int_a^b A(x)dx$

ឧទាហរណ៍ទី១០

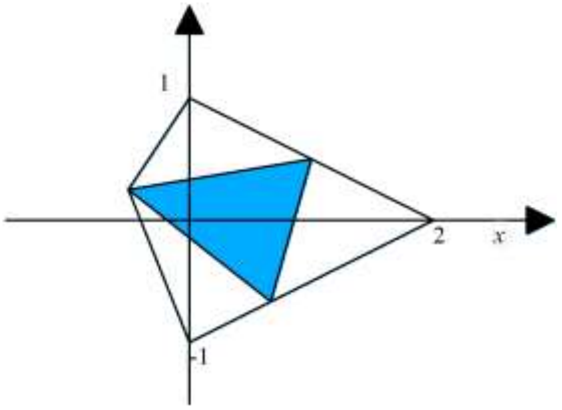
គណនាមាឌសូលីតដែលកកើតឡើងដោយបន្ទាត់ $y=1-\frac{x}{2}$ និង $y=\frac{x}{2}-1$ និង $x=0$ ហើយមានមុខកាត់កែងនឹង $(x'ox)$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

បាតនៃត្រីកោណសម័ង្សជាមុខកាត់គឺ

$$1-\frac{x}{2}-\left(-1+\frac{x}{2}\right)=2-x$$

ក្រឡាផ្ទៃមុខកាត់គឺ $S(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2-x)^2$

ដូចនេះ $V=\int_0^2 S(x)dx$



$$= \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(2-x)^2 dx$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{(2-x)^3}{3}\right)_0^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

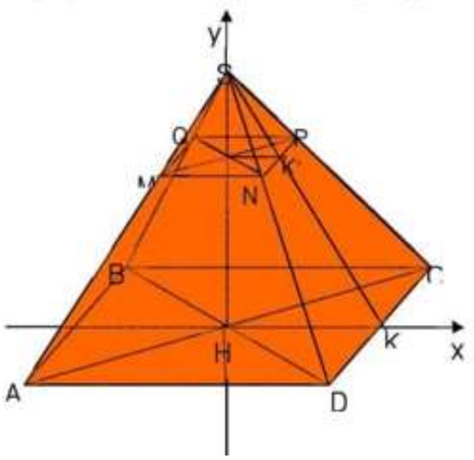
ដូចនេះ $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

2) ចំពោះផ្ទៃមុខកាត់ $A(y)$ ដែលកែងនឹងអ័ក្ស $(y'oy)$, $c \le y \le d$ គេបាន $V = \int_c^d A(y)dy$

ឧទាហរណ៍ទី១១

បង្ហាញថាមាឌពីរ៉ាមីតដែលមានក្រឡាផ្ទៃបាតជាការេគឺ $V = \frac{1}{3}Bh$ ដែល h ជាកម្ពស់ B ជាផ្ទៃបាត ។

យើងសង់ប្លង់មួយប្រសព្វជាមួយពីរ៉ាមីតហើយស្របជាមួយប្លង់បាតដែលមានកម្ពស់ $h-y$ និងប្រវែងជ្រុងនៃការេគឺ b' ។



$AB = BC = CD = AD = b$

$MN = NP = PQ = MQ = b'$

ដោយត្រីកោណ $SH'K'$ ដូចនឹង SHK

យើងបានផលធៀបដំនូច

$$\frac{SH'}{SH} = \frac{H'K'}{HK} = \frac{SK'}{SK}$$

ហើយ $HK = \frac{1}{2}b$, $H'K' = \frac{1}{2}b'$

$SH' = h - y$, $SH = h$

យើងបាន

$$\frac{b'}{b} = \frac{h-y}{h} \quad \Rightarrow b' = \frac{b}{h}(h-y)$$

ដោយ b' ជាប្រវែងជ្រុងនៃការេ $MNPQ$ យើងបាន

$$S_{MNPQ} = A(y) = (b')^2 = \frac{b^2}{h^2}(h-y)^2$$

បើអាំងតេក្រាលនៅចន្លោះ 0 ដល់ h នៃ $A(y)$ បង្កើតបានជា

$$V = \int_0^h \frac{b^2}{h^2}(h-y)^2 dy$$

$$= -\frac{b^2}{h^2}\int_0^h (h-y)^2 d(h-y)$$

$$= \left[-\frac{b^2}{h^2}\cdot\frac{1}{3}(h-y)^3\right]_0^h$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{b^2}{h^2}(-h)^3$$

$$= \frac{1}{3}hB$$

ដូចនេះ $V == \frac{1}{3}hB$ ដែល $B = b^2$ ជាផ្ទៃក្រឡាបាត ។

ប្រតិបត្តិ

បង្ហាញថាមាឌស្វ៊ែកាំ r គឺ $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ ។

ចម្លើយ

បង្ហាញថាមាឌស្វ៊ែកាំ r គឺ $V = \frac{4\pi}{3}r^3$

យើងសង់រង្វង់មួយមានកាំ r យើងបានមាឌស្វ៊ែ

$$V = \pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_{-r}^{r}\left(r^2 - x^2\right)dx$$

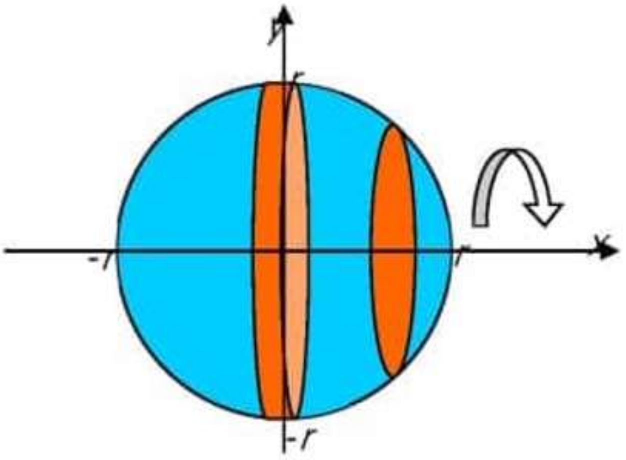
$$= \pi\left(r^2x - \frac{1}{3}x^3\right)_{-r}^{r}$$

$$= \pi\left(r^2r - \frac{1}{3}r^3 + r^2r - \frac{1}{3}r^3\right)$$

$$= \pi\left(2r^3 - \frac{2}{3}r^3\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}r^3$$

ដូចនេះ $V = \frac{4\pi}{3}r^3$



លំហាត់បន្ថែម

លំហាត់ទី១

តាង $f(x)$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$

1) សរសេរនិយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់ $\int_a^b f(x)dx$

2) បង្ហាញថាបើ $f(x)$ មានអាំងតេក្រាលនោះ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}$

3) បង្ហាញថា $\sum_{i=1}^{n}\sin k\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ ។

4) គណនា $\int_0^{\pi}\sin xdx$ ដោយប្រើរូបមន្តក្នុងសំណួរទី២។

ចម្លើយ

1) ឧបមាថា $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{n-1} \le x_n = b$

ប្រសិនជាមានចំនួន $I = \lim_{\max\Delta x\to 0}\sum_{k=1} f(c_k)$

ដែល $\Delta X_k = X_k - X_{k-1}$ និង $C_k S$ យើងជ្រើសរើសចំនួនណាមួយក្នុងចន្លោះ $[x_{k-1}, x_k]$ នោះ I ហៅថា អាំងតេក្រាលកំណត់ $f(x)$ លើ $[a,b]$ និងត្រូវបានសរសេរជា $\int_a^b f(x)dx$ ។

2) បើ $f(x)$ មានអាំងតេក្រាលនោះយើងអាចសរសេរ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta x_k$$

ក្នុងនិយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់យក $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ ចំពោះគ្រប់ K

យើងបាន

$$x_0 = a$$

$$x_1 = a+\frac{b-a}{n}$$

$$x_2 = a+\frac{b-a}{n}\cdot 2$$

$$x_3 = a+\frac{b-n}{n}\cdot 3$$

......

$$x_k = a+\frac{b-a}{n}\cdot k$$

....

$$x_n = a+\frac{b-a}{n}\cdot k \;\; x_n = a+\frac{b-n}{n}\cdot n = b$$

ដូចនេះ $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n = b$ ។

ដោយ C_k អាចជ្រើសរើសតម្លៃណាមួយក៏បានក្នុង $[X_{k-1}, X_k]$ យើងអាចយក

$$C_k = X_k = a+\frac{b-a}{n}\cdot k$$

នោះយើងបានសមភាព

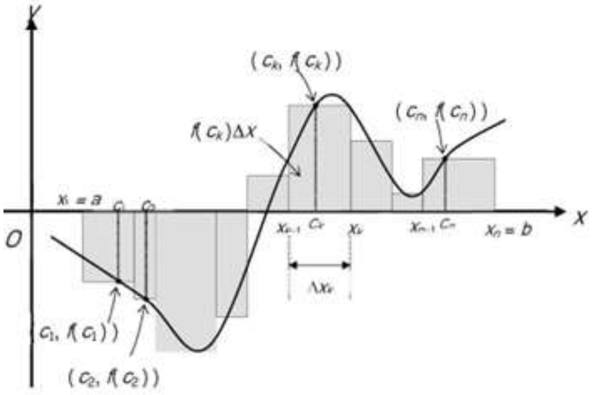
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

3) បង្ហាញថាសមភាពតាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ពេល $n=1$ យើងបាន

(អង្គខាងឆ្វេង)= $\sin\alpha$

(អង្គខាងស្តាំ)= $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \sin\alpha$



ដូចនេះ សមភាពនេះពិតចំពោះ $n=1$

ឧបមាថាសមភាពពិតដល់ $n=p$

យើងបាន

$$\sum_{k=1}^{p}\sin k\alpha = \frac{\sin\frac{p\alpha}{2}\sin\frac{p+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha = \sum_{k=1}^{p}\sin k\alpha + \sin(p+1)\alpha$$

$$= \frac{\sin\frac{p\alpha}{2}\sin\frac{p+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \sin 2\left(\frac{p+1}{2}\alpha\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{p\alpha}{2}\sin\frac{p+1}{2}\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\left(\frac{p+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{p\alpha}{2}\sin\frac{p+1}{2}\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{p+1}{2}\cdot\cos\frac{p+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{p+1}{2}\alpha\left(\sin\frac{p\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{p\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{p+1}{2}\alpha\left(\sin\frac{p\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{p\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{p\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{p+1}{2}\alpha\left(\sin\frac{p\alpha}{2}\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\alpha\cdot\cos\frac{p\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{p+1}{2}\alpha\left(\sin\frac{p\alpha}{2}\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\frac{p\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{p+1}{2}\alpha\cdot\sin\left(\frac{p\alpha}{2}+\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{p+1}{2}\alpha\cdot\sin\frac{p+2}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

ដូចនេះសមភាពនេះពិតគ្រប់ $n=p+1$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$ ចំពោះ $n=1,2,3,...$

4) $\int_0^{\pi}\sin xdx=\lim\limits_{n\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$ (តាមសំណួរទី២)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n}k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$ (តាមសំណួរទី៣)

$$=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=2\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{2}=2$$

លំហាត់ទី២ (ការគណនាលីមីតតាមនិយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់)

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{2n+k}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+(2k+1)}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

ចម្លើយ

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{2n+k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}=\int_0^3\frac{1}{2+x}dx=\left[\ln(2+x)\right]_0^3=\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{2}$

$$3)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+(2k-1)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+(2n-1)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+(2n-1)}+\frac{1}{2n+2n}\right)$$

$$-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+4}+\cdots+\frac{1}{2n+(2n-2)}+\frac{1}{2n+2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n+k}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+2k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^2\frac{1}{2+x}dx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\left[\ln(2+x)\right]_0^2-\frac{1}{2}\left[\ln(1+x)\right]_0^1$$

$$=\ln 4-\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2-\ln$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2$$

4) ដោយ $n>1$ យើងបាន $\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$\ln\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}=\ln\left(\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+(n+1))(n+n)}{n^n\cdot n!}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+(n+n))}{\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n}_{n}}\right)$$ ដែល n ជាចំនួនដង

$$=\frac{1}{n}\ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)\left(\frac{n+3}{n}\right)\cdots\left(\frac{n+n}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)+\cdots\cdot+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)\,dx$$

$$=\left[(1+x)\ln(1+x)-x\right]_0^1=2\ln 2-1$$

ដូចនេះ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\ln\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}=\exp\left(2\ln 2-1\right)$$

$$=e^{2\ln 2-1}=e^{\ln 2^2}e^{-1}=\frac{4}{e}$$

លំហាត់ទី៣ (ការគណនាលីមីតតាមនិយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់)

គណនាលីមីត $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{(2n+1)^2}\ln\frac{n+2}{n}+\frac{n}{(2n+2)^2}\ln\frac{n+4}{n}+\cdots+\frac{n}{(2n+n)^2}\ln\frac{n+2n}{n}\right\}$

ចម្លើយ

$$\frac{n}{(2n+1)^2}\ln\frac{n+2}{n}+\frac{n}{(2n+2)^2}+\ln\frac{n+4}{n}+\cdots+\frac{n}{(2n+n)^2}\ln\frac{n+2n}{n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(2n+k)^2}\ln\frac{n+2k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(2n+2)^2}\ln\frac{n+2n}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)^2}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{(2n+1)^2}\ln\frac{n+2}{n}+\frac{n}{(2n+3)^2}\ln\frac{n+4}{n}+\cdots+\frac{n}{(2n+n)^2}\ln\frac{n+2n}{n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(2+\frac{k}{n}\right)^2}\ln\left(n+\frac{2k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(2+x)^2}\ln(1+2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{-1}{2+x}\ln(1+2x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{-1}{2+x}\cdot\frac{2}{1+2x}\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}\ln 3+\frac{2}{3}\int_0^1\left(\frac{2}{1+2x}-\frac{1}{2+x}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{3}\ln 3+\frac{2}{3}\left[\ln(1+2x)-\ln(2+x)\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{3}\ln 3+\frac{2}{3}(\ln 3-\ln 3)-(\ln 1-\ln 2)$$

$$=-\frac{1}{3}\ln 3+\frac{2}{3}\ln 2$$

លំហាត់ទី៤ (ការគណនាលីមីតតាមនិយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់)

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(\sqrt{n^2+1}+2\sqrt{n^2+2^2}+3\sqrt{n^2+3^2}+\cdots+n\sqrt{n^2+n^2}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{n+1}{n+k}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{k}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}$

ចម្លើយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(\sqrt{n^2+1}+2\sqrt{n^2+2^2}+3\sqrt{n^2+3^2}+\cdots+n\sqrt{n^2+n^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(\sqrt{n^2+1}+2\sqrt{n^2+2^2}+3\sqrt{n^2+3^2}+\cdots+n\sqrt{n^2+n^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(n\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+2n\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+3n\sqrt{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\cdots+n\cdot n\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{2}{n}\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\frac{3}{n}\sqrt{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{n}{n}\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$

$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}\right)_0^1$

$=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(\sqrt{n^2+1}+2\sqrt{n^2+2^2}+3\sqrt{n^2+3^2}+\cdots+n\sqrt{n^2+n^2}\right)=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

តាង $A=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

$\ln A=\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

$$=\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$$=x\ln(1+x)\Big|_0^1-x\Big|_0^1+\ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$=\ln 2-1+\ln 2$$

$$=2\ln 2-1=\ln\frac{2^2}{e}$$

ដូចនេះ $\ln A=\ln\frac{4}{e}$ ឬ $A=\frac{4}{e}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{n+1}{n+k}$

យើងមាន

$$\sum_{k=n}^{2n}\frac{n+1}{n+k}=\frac{n+1}{n+n}+\frac{n+1}{n+(n+1)}+\frac{n+1}{n+(n+2)}+\cdots+\frac{n+1}{n+(n+n)}$$

$$=\frac{n+1}{n+n}+\frac{n+1}{2n+1}+\frac{n+1}{2n+2}+\cdots+\frac{n+1}{2n+n}$$

$$=\frac{n+1}{2n}+\frac{n+1}{n}\left\{\frac{1}{2+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{2}{n}}+\frac{1}{2+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{2+\frac{n}{n}}\right\}$$

$$=\frac{n+1}{2n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\frac{1}{2+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{2}{n}}+\frac{1}{2+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{2+\frac{n}{n}}\right\}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{n+1}{n+k}=\frac{n+1}{2n^2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{2}{n}}+\frac{1}{2+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{2+\frac{n}{n}}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}$$

$$\lim_{n\to n}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{n+1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}$$

$$=0+1\times\int_0^1\frac{1}{2+x}dx$$

$$= \ln(2+x)\Big|$$

$$= \ln 3 - \ln 2$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to n}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{n+1}{n+k} = \ln 3 - \ln 2$

$$4)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{k}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{k}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{k}{n+k}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{n+k}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{k}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)$$

$$= \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= -\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$

$$= -x\ln(1+x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$$

$$= -\ln 2 + 1 - \ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$= 1 - 2\ln 2$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{k}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 - 2\ln 2$

លំហាត់ទី៥ (ការគណនាលីមីតតាមនិយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់)

បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}(\ln k - n\ln n) = \int_1^2 \ln x\,dx$

(វិធីទី១)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\ln k-n\ln n\right)=\frac{1}{n}\left(\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)-\underbrace{\ln n-\ln n-\ln n-\cdots\ln n}_{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\ln(n+1)-\ln n+\ln(n+2)-\ln n+\cdots+\ln(n+n)-\ln n\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\ln(\frac{n+1}{n})+\ln(\frac{n+2}{n})+\ln(\frac{n+3}{n})+\cdots+\ln(\frac{n+n}{n})\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}(\ln k-n\ln n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$$=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx$$

$$=\ln 2-1+\ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$=2\ln 2-1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}(\ln k-n\ln n)=2\ln 2-1 \qquad (1)$$

$$\bullet\int_1^2\ln x dx$$

$$=x\ln x\Big|_1^2-x\Big|_1^2$$

$$=2\ln 2-\ln 1-1$$

$$=2\ln 2-1$$

ដូចនេះ $\int_1^2\ln x dx=2\ln 2-1 \qquad (2)$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\ln k-n\ln n\right)=\int_1^2\ln x dx$$

(វិធីទី២)

បង្ហាញថា

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\ln k - n\ln n\right)=\int_1^2 \ln x dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\ln k - n\ln n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)-\underbrace{\ln n-\ln n-\cdots-\ln n}_{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)+\ln\left(\frac{n+3}{n}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n+n}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_1^2 \ln x dx$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\ln k - n\ln n\right)=\int_1^2 \ln x dx$

ចំណាំ

វិធីទី១ តាមក្រាប

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_1^2 \ln x dx$$

វិធីទី២

$$\frac{n+1}{n}\le x\le\frac{2n}{n}$$

$$1+\frac{1}{4}\le x\le 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\lim_{n\to\infty}x\le\lim_{n\to\infty}2$$

$$1\le x\le 2$$

ដូចនេះ $\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)=\int_1^2 \ln x dx$

លំហាត់ទី៦ (ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់)

គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោមដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

1) $\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)\left(2+x\right)^n dx$ 2) $\int_{6}^{8}\frac{x}{x^2-6x+8}dx$

3) $\int_{0}^{1}\frac{x^2}{x^2-x-2}dx$ 4) $\int_{1}^{3}\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$

5) $\int_{0}^{\pi}\cos mx\cos nx dx$ 6) $\int_{0}^{1}\frac{x}{1+3x^2}dx$

7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{3+\cos^2 x}dx$ 8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^2 x dx$

9) $\int_{0}^{\pi}e^{-at}\cos^2\frac{t}{2}dt \quad (a\neq 0)$ 10) $\int_{1}^{e}\frac{\sin(\pi\ln x)}{x}dx$

11) $\int_{0}^{\sqrt{\ln 6}}\frac{x}{e^{-x^2}+e^{x^2}+2}dx$ 12) $\int_{0}^{1}\left(4-x^2-\sqrt{1-x^2}\right)dx$

13) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ 14) $\int_{0}^{a}\sqrt{2ax-x^2}dx$

15) $\int_{0}^{a}\left(x^2+a^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx \quad (a>0)$ 16) $\int_{0}^{\pi}\left|\sin\left(\left|x-\frac{\pi}{6}\right|+\frac{\pi}{3}\right)\right|dx$

17) $\int_{0}^{1}\frac{2x}{x^2-x+1}dx$ 18) $\int_{0}^{2\pi}\left|\cos(x-a)-\cos x\right|dx \quad (0<a<\pi)$

19) $\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}dx$ 20) $\int_{0}^{1}\frac{x^3}{x^8+1}dx$

21) $\int_{0}^{a}\frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}dx$ 22) $\int_{0}^{2}x^3\sqrt{4-x^2}dx$

ចម្លើយ

1) $\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)\left(2+x\right)^n dx$

យក $t=2+x$ នោះយើងបាន

$x=-2\rightarrow t=0; x=2\rightarrow t=4$

$$(4-x^2)(2+x)^n=-\left\{\left(x+2\right)^2-4(x+2)\right\}\left(x+2\right)^n$$
$$=-(t^2-4t)t^n$$
$$=-t^{n+2}+4t^{n+1}$$

ដោយ $dt=dx$ យើងបាន

$$\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)\left(2+x\right)^n dx=\int_{0}^{4}(-t^{n+2}+4t^{n+1})dt=\left[-\frac{t^{n+3}}{n+3}+\frac{4t^{n+2}}{n+2}\right]_0^4$$
$$=-\frac{4^{n+3}}{n+3}+\frac{4^{n+3}}{n+2}$$
$$=\frac{4^{n+3}}{(n+2)(n+3)}$$

ដូចនេះ $\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)\left(2+x\right)^n dx=\frac{4^{n+3}}{(n+2)(n+3)}$

2) $\int_{6}^{8}\frac{x}{x^2-6x+8}dx$

យក $\frac{x}{x^2-6x+8}=\frac{x}{(x-2)(x-4)}$

$\frac{x}{(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x-2}$ ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ

$\frac{x}{(x-2)(x-4)}=\frac{A(x-2)+B(x-4)}{(x-4)(x-2)}=\frac{(A+B)x+(-2A-4B)}{(x-4)(x-2)}$

យើងបាន $\begin{cases}A+B=1\\-2A-4B=0\end{cases}$

$\Rightarrow A=2, B=-1$

$\frac{x}{(x-2)(x-4)}=\frac{2}{x-4}-\frac{1}{x-2}$

$\int_{6}^{8}\frac{x}{(x-2)(x-4)}dx=\int_{6}^{8}\left(\frac{2}{x-4}-\frac{1}{x-2}\right)dx$

$=\left[2\ln|x-4|-\ln|x-2|\right]_{6}^{8}$

$=2\ln 4-\ln 6-(2\ln 2-\ln 4)$

$=4\ln 2-(\ln 2+\ln 3)-(2\ln 2-2\ln 2)$

$=3\ln 2-\ln 3$

ដូចនេះ $\int_{6}^{8}\frac{x}{x^2-6x+8}dx=3\ln 2-\ln 3$

3) $\int_{0}^{1}\frac{x^2}{x^2-x-2}dx$

គេមាន $\frac{x^2}{x^2-x-2}=1+\frac{x+2}{x^2-x-2}=1+\frac{x}{(x-2)(x+1)}$

យក $\frac{x+2}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$ ដែល A និង Bជាចំនួនថេរ

នោះ $\frac{x+2}{(x-2)(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A-2B)}{(x-2)(x+1)}$

យើងបាន $\begin{cases}A+B=1\\A-2B=2\end{cases}$

$\Rightarrow A=\frac{4}{3}, B=-\frac{1}{3}$

$$\frac{x^2}{x^2-x-2}=1+\frac{x+2}{(x-2)(x+1)}=1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$\int_0^1\frac{x^2}{x^2-x-2}dx=\int_0^1\left(1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\left[x+\frac{4}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|\right]_0^1$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\ln 2\right)-\frac{4}{3}\ln 2$$

$$=1-\frac{5}{3}\ln 2$$

ដូចនេះ $\int_0^1\frac{x^2}{x^2-x-2}dx=1-\frac{5}{3}\ln 2$

4) $\int_1^3\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx=\int_1^3\left(\frac{x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$$=\int_1^3\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^3$$

$$=\left(\frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}}-2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}}-2\cdot 1^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=(2\sqrt{3}-2\sqrt{3})-\left(\frac{2}{3}-2\right)$$

$$=\frac{4}{3}$$

ដូចនេះ $\int_1^3\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx=\frac{4}{3}$

5) $\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx dx$

$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x+cos(m-n)x\}$

$i)\ m=n$

$$\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x+c0s(m-n)x\}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos 2mx+1)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2m}\sin 2mx+x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

$ii)\ m \neq n$

$$\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\{\cos(m+n)x + cos(m-n)x\}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{\pi}$$

$$= 0$$

$$6)\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\left(1+3x^2\right)'}{1+3x^2}dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[\ln(1+3x^2)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}\ln 4 = \frac{1}{3}\ln 2$$

ដូចនេះ $\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}dx = \frac{1}{3}\ln 2$

$$7)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3+\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3+\frac{\cos 2x+1}{2}}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin 2x}{7+\cos 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos 2x)'}{7+\cos 2x}dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos 2x)'}{7+\cos 2x}dx = -\left[\ln|7+\cos 2x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\ln 6 + \ln 8$$

$$= \ln\frac{4}{3}$$

ដូចនេះ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3+\cos^2 x}dx = \ln\frac{4}{3}$

$$8)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 xdx$$

ដោយ $x^2\cos^2 x = x^2\cdot\frac{\cos 2x+1}{2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2\cos 2x$

យើងបាន

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2\cos 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2xdx$$

ប៉ុន្តែ $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{48}$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2xdx = \frac{1}{2}\left[x^2\cdot\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cdot\frac{\sin 2x}{2}dx$$

$$= -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[\frac{-\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\pi}{8}$$

ដូចនេះ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 xdx = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8}$

9) $\int_0^{\pi} e^{-at}\cos^2\frac{t}{2}dx \qquad (a \neq 0)$

ដោយ $e^{-at}\cos^2\frac{t}{2} = e^{-at}\cdot\frac{\cos t+1}{2} = \frac{e^{-at}}{2} + \frac{e^{-at}\cos t}{2}$

គេបាន $\int_0^{\pi} e^{-at}\cos^2\frac{t}{2}dt = \int_0^{\pi}\frac{e^{-at}}{2}dt + \int_0^{\pi}\frac{e^{-at}\cos t}{2}dt$

ប៉ុន្តែ $\int_0^{\pi}\frac{e^{-at}}{2}dt = \left[-\frac{e^{-at}}{2a}\right]_0^{\pi} = -\frac{e^{-a\pi}}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1-e^{-a\pi}}{2a}$

យក $I = \int_0^{\pi}\frac{e^{-at}\cos t}{2}dt$ នោះ

$$I = \int_0^{\pi}\frac{e^{-at}\cos t}{2}dt = \frac{1}{2}\left[e^{-at}\sin t\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(-a)e^{-at}\sin tdt$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\pi} e^{-at}\sin tdt = \frac{a}{2}\left[e^{-at}(-\cos t)\right]_0^{\pi} - \frac{a}{2}\int_0^{\pi}(-at)e^{-at}(-\cos t)dt$$

$$= \frac{a(1+e^{-a\pi})}{2} - \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} e^{-at}\cos tdt$$

$$= \frac{a(1+e^{-a\pi})}{2} - a^2I$$

$$\Rightarrow I = \frac{a(1+e^{-a\pi})}{2(a^2+1)}$$

ដូចនេះ $\int_0^{\pi} e^{-at}\cos^2\frac{t}{2}dt = \frac{1-e^{-a\pi}}{2a} + \frac{a(1+e^{-a\pi})}{2(a^2+1)}$

10) $\int_1^{e}\frac{\sin(\pi\ln x)}{x}dx$

យក $v = \pi\ln x \Rightarrow dt = \frac{\pi}{x}dx$

បើ $x=1 \to t=0, x=e \to t=\pi$

យើងបាន $\int_1^e \frac{\sin(\pi \ln x)}{x}dx = \int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi}dt = \frac{1}{\pi}[-\cos t]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$

ដូចនេះ $\int_1^e \frac{\sin(\pi \ln x)}{x}dx = \frac{2}{\pi}$

11) $\int_0^{\sqrt{\ln 6}} \frac{x}{e^{-x^2} + e^{x^2} + 2}dx$

យក $t = e^{x^2} \Rightarrow dt = 2xe^{x^2}dx$

បើ $x = 0 \to t = 1, x = \sqrt{\ln 6} \to t = 6$

យើងបាន $\int_0^{\sqrt{\ln 6}} \frac{x}{e^{-x^2} + e^{x^2} + 2}dx = \int_1^6 \frac{x}{e^{-x^2} + e^{x^2} + 2} \cdot \frac{1}{2xe^{x^2}}dx$

$= \int_1^6 \frac{1}{(t^{-1} + t + 2) \cdot 2t}dt$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t+1}\right]_1^6 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t+1}\right]_1^6 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{28}$

ដូចនេះ $\int_0^{\sqrt{\ln 6}} \frac{x}{e^{-x^2} + e^{x^2} + 2}dx = \frac{5}{28}$

12) $\int_0^1 (4 - x^2 - \sqrt{1 - x^2})dx = \int_0^1 (4 - x^2)dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$

តែ $\int_0^1 \left(4 - x^2\right)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{11}{3}$

យក $x = \cos t, dx = -\sin tdt$

បើ $x = 0 \to t = \frac{\pi}{2}, x = 1 \to t = 0$

យើងបាន $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - \cos^2 t}(-\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2}dt$

$= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $\int_0^1 (4 - x^2 - \sqrt{1 - x^2})dx = \frac{11}{3} - \frac{\pi}{4}$

13) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

យក $x = 2\cos t, dx = -2\sin tdt$

បើ $x = 0 \to t = \frac{\pi}{2}, x = 1 \to t = \frac{\pi}{3}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-2\sin t}{\sqrt{4-(2\cos t)^2}}dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (-1)dt = \frac{\pi}{6}$$

ដូចនេះ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\pi}{6}$

14) $\int_0^a \sqrt{2ax-x^2}dx$

ដោយ $\sqrt{2ax-x^2} = \sqrt{-(x-a)^2+a^2}$

យក $x = a - a\cos t, dx = a\sin tdt$

បើ $x = 0 \to t = 0, x = a \to t = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^a \sqrt{2ax-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\{(a-a\cos t)-a\}^2+a^2} \cdot a\sin tdt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{-a^2\cos^2 t + a^2}\sin tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 tdt$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}$$

ដោយ $y = \sqrt{-(x-a)^2+a^2}$ ជាពាក់កណ្តាលលើរង្វង់ $(x-a)^2+y^2=a^2$

អាំងតេក្រាល $\int_0^a \sqrt{2ax-x^2}dx$ ស្មើ $\frac{1}{4}$ នៃផ្ទៃក្រឡារង្វង់គឺ $\frac{\pi a^2}{4}$ ។

15) $\int_0^1 (x^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}dx \quad (a>0)$

យក $x = a\tan\theta, dx = \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

បើ $x = 0 \to \theta = 0, x = a \to \theta = \frac{\pi}{4}$

យើងបាន $\int_0^a (x^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a^2\tan^2\theta + a^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{a^2}{\cos^2\theta}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3\theta}{a^3} \cdot \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta d\theta = \frac{1}{a^2}[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2a^2}$$

ដូចនេះ $\int_0^1 (x^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{2a^2}$

16) $\int_0^{\pi}\left|\sin\left(\left|x-\frac{\pi}{6}\right|+\frac{\pi}{3}\right)\right|dx$

គេមាន $\left|x-\frac{\pi}{6}\right|+\frac{\pi}{3}=x+\frac{\pi}{6}$ ចំពោះ $x\ge\frac{\pi}{6}$ និង $-x+\frac{\pi}{2}$ ចំពោះ $x\le\frac{\pi}{6}$

គេបាន $\int_0^{\pi}\left|\sin\left(\left|x-\frac{\pi}{6}\right|+\frac{\pi}{3}\right)\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left|\sin\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)\right|dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right|dx$

ហើយ $\left|\sin\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=\sin\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)$ ចំពោះ $0\le x\le\frac{\pi}{6}$

$\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right|=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ ចំពោះ $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5\pi}{6}$

$=-\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ ចំពោះ $\frac{5\pi}{6}\le x\le\pi$

យើងបាន $\int_0^{\pi}\left|\sin\left(\left|x-\frac{\pi}{6}\right|+\frac{\pi}{3}\right)\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx-\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$

$$=\left[\cos\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}-\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}$$

$$=(\frac{1}{2}+0)+(1+\frac{1}{2})-(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)$$

$$=3-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះ $\int_0^{\pi}\left|\sin\left(\left|x-\frac{\pi}{6}\right|+\frac{\pi}{3}\right)\right|dx=3-\frac{\sqrt{3}}{2}$

17) $\int_0^1\frac{2x}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{(x^2-x+1)'+1}{x^2-x+1}dx$

$$=\int_0^1\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx+\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx$$

ដោយ $\int_0^1\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx=\left[\ln\left|x^2-x+1\right|\right]_0^1=0$

$\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx$

យក $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ ដែល $-\pi\le\theta\le\pi$

នោះ $dx=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta$

បើ $x=0\to -\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta \to \tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}\to\theta=-\frac{\pi}{6}$

$x=1\to\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta \ \to\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\to\theta=\frac{\pi}{6}$

យើងបាន $\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\tan^2\theta+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{4}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\sqrt{3}}{3}d\theta$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

ដូចនេះ $\int_0^1\frac{2x}{x^2-x+1}dx=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$

18) $\int_0^{2\pi}\left|\cos(x-a)-\cos x\right|dx=\int_0^{2\pi}\left|2\sin\left(x-\frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2}\right|dx$

ដោយ $0<a<\pi$ គេបាន $0<\frac{a}{2}<\frac{\pi}{2}$ និង $\sin\frac{a}{2}>0$

$\sin\left(x-\frac{a}{2}\right)\le 0$ ចំពោះ $0\le x\le\frac{a}{2}$ និង $\pi+\frac{a}{2}\le x\le 2\pi$

$\sin\left(x-\frac{a}{2}\right)\ge 0$ ចំពោះ $\frac{a}{2}\le x\le\pi+\frac{a}{2}$

យើងបាន

$$\int_0^{2\pi}\left|\cos(x-a)-\cos x\right|dx=-2\sin\frac{a}{2}\int_0^{\frac{a}{2}}\sin\left(x-\frac{a}{2}\right)dx+2\sin\frac{a}{2}\int_{\frac{a}{2}}^{\pi+\frac{a}{2}}\sin\left(x-\frac{a}{2}\right)dx-2\text{in}\frac{a}{2}\int_{\pi+\frac{a}{2}}^{2\pi}\sin\left(x-\frac{a}{2}\right)dx$$

$$=-2\sin\frac{a}{2}\left[-\cos\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]_0^{\frac{a}{2}}+2\sin\frac{a}{2}\left[-\cos\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]_{\frac{a}{2}}^{\pi+\frac{a}{2}}-2\sin\frac{a}{2}\left[-\cos\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]_{\pi+\frac{a}{2}}^{2\pi}$$

$$=2\sin\frac{a}{2}-2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}+2\sin\frac{a}{2}+2\sin\frac{a}{2}+2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}+2\sin\frac{a}{2}=8\sin\frac{a}{2}$$

ដូចនេះ $\int_0^{2\pi}\left|\cos(x-a)-\cos x\right|dx=8\sin\frac{a}{2}$

19) $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}dx$

ដោយ $\frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}=\frac{(4-3x^2)'}{\sqrt{4-3x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$

យើងបាន

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}dx = -\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(4-3x^2)'}{\sqrt{4-3x^2}}dx$$

$$= -\frac{1}{6}\left[2(4-3x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{6}(2-4) = \frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}dx = \frac{1}{3}$

20) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx$

យក $t = x^4, dt = 4x^3dx$

បើ $x=0 \to t=0, x=1 \to t=1$

យើងបាន $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt$

យក $t = \tan\theta, dx = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

បើ $t=0 \to \theta=0, t=1 \to \theta = \frac{\pi}{4}$

គេបាន $\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx = \frac{\pi}{16}$

21) $\int_0^a \frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}dx = \int_0^a \frac{e^{2x}}{e^{2x}+e^a}dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \frac{(e^{2x}+e^a)'}{e^{2x}+e^a}dx = \frac{1}{2}\left[\ln(e^{2x}+e^a\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\ln\left(e^{2a}+e^a\right)-\ln\left(1+e^a\right)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\ln e^a\left(e^a+1\right)-\ln(1+e^a)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\ln e^a = \frac{a}{2}$$

ដូចនេះ $\int_0^a \frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}dx = \frac{a}{2}$

22) $\int_0^2 x^3\sqrt{4-x^2}dx$

យក $t = 4-x^2, dt = -2xdx$

បើ $x=0\to t=4, x=2\to t=0$

យើងបាន $\int_0^2 x^3\sqrt{4-x^2}dx=\int_4^0 (4-t)\sqrt{t}\cdot(-\frac{1}{2})dt$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4 (4-t)\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\int_0^4 (4t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}})dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^4=\frac{1}{2}\left(\frac{64}{3}-\frac{64}{5}\right)=\frac{64}{15}$$

ដូចនេះ $\int_0^2 x^3\sqrt{4-x^2}dx=\frac{64}{15}$

លំហាត់ទី៧ ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan x}\frac{t}{1+t^2}dt+\int_{\frac{1}{e}}^{\cot x}\frac{1}{t(t^2+1)}dx=1 \qquad , \tan x>0$

ចម្លើយ $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan x}\frac{t}{1+t^2}dt+\int_{\frac{1}{e}}^{\cot x}\frac{1}{t(t^2+1)}dx$

$$=\int_{\frac{1}{e}}^{\cot x}\frac{t}{1+t^2}dt+\int_{\cot x}^{\tan x}\frac{t}{1+t^2}dt+\int_{\frac{1}{e}}^{\cot x}\frac{1}{t(t^2+1)}dt$$

$$=\int_{\frac{1}{e}}^{\cot x}\left(\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{t(t^2+1)}\right)dt+\int_{\cot x}^{\tan x}\frac{t}{1+t^2}dt$$

$$=\ln|t|\Big|_{\frac{1}{e}}^{\cot x}+\frac{1}{2}\int_{\cot x}^{\tan x}\frac{2t}{t^2+1}dt$$

$$=\ln(\cot x)+\ln e+\frac{1}{2}\ln\left|(t^2+1)\right|\Big|_{\cot x}^{\tan x}$$

$$=\ln(\cot x)+1+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-\frac{1}{2}\ln(\cot^2 x+1)$$

$$=1+\ln(\cot x)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)^2$$

$$=1+\ln(\cot x)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2$$

$$=1+\ln(\cot)-\frac{1}{2}\cdot 2\ln\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$=1+\ln(\cot x)-\ln(\cot x)$$

$$=1$$

ដូចនេះ $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan x}\frac{t}{1+t^2}dt+\int_{\frac{1}{e}}^{\cot x}\frac{1}{t(t^2+1)}dx=1 \qquad ,\tan x>0$

លំហាត់ទី៨ ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់

គេឱ្យ f ជាប់លើ $[0,b]$។ បង្ហាញថា $\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-a)}dx=\frac{b}{2}$

រួចគណនា $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sin(1-x)+\sin x}dx$

ចម្លើយ

$$\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx = \int_0^b \frac{f(b-x)+f(x)-f(b-x)}{f(x)+f(b-x)}dx$$
$$= \int_0^b dx - \int_0^b \frac{f(b-x)}{f(x)+f(b-x)}dx$$
$$= b - \int_0^b \frac{f(b-x)}{f(x)+f(b-x)}dx$$

តាង $t = b - x \Rightarrow dx = -dt$

បើ $x = b \to t = 0$

$x = 0 \to t = b$

$$\int_0^b \frac{f(b-x)}{f(x)+f(b-x)}dx = \int_b^0 \frac{f(t)}{f(b-t)+f(t)}(-dt)$$
$$= \int_0^b \frac{f(t)}{f(b-t)+f(t)}dt$$

ប្តូរ $t \to x$ យើងបាន

$$\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx = b - \int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx$$

$$2\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx = b$$

$$\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx = \frac{b}{2}$$

ដូចនេះ $\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-a)}dx = \frac{b}{2}$

- គណនា $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sin(1-x)+\sin x}dx$

តាមសម្រាយខាងលើ យើងបាន $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sin(1-x)+\sin x}dx = \frac{1}{2}$

លំហាត់ទី៩ ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់

$a)$ ចូរបង្ហាញថាបើ $|x| \le 1, \sqrt{1-x^2} \le \sqrt{1-x^{2n}} \quad (n \ge 1)$

$b)$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx \le \frac{\pi}{6}$

ចម្លើយ

$a)$ ចូរបង្ហាញថាបើ $|x| \le 1, \sqrt{1-x^2} \le \sqrt{1-x^{2n}} \quad (n \ge 1)$

បើ $|x| \le 1$ នោះ $x^{2n} \le x^2$

$$-x^2 \le -x^{2n}$$
$$1-x^2 \le 1-x^{2n}$$
$$\sqrt{1-x^2} \le \sqrt{1-x^{2n}}$$

ដូចនេះ $|x| \le 1$ នោះ $\sqrt{1-x^2} \le \sqrt{1-x^{2n}}$

$b)$ បង្ហាញថា $\frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx \le \frac{\pi}{6}$

តាមសម្រាយខាងលើយើងបាន

$$\sqrt{1-x^2} \le \sqrt{1-x^{2n}} \le 1$$

$$1 \le \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx \le \left[\operatorname{Arcsin} x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx \le \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx \le \frac{\pi}{6}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx \le \frac{\pi}{6}$

លំហាត់ទី១០ ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់

បង្ហាញថា $-\frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{a^2+b^2} \le \int_0^1 \frac{a\cos x + b\sin x}{x^2+1} dx \le \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{a^2+b^2}$

ចម្លើយ

យើងមាន $|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{a\cos x + b\sin x}{x^2+1}\right| \le \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{x^2+1}$$

$$-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{x^2+1} \le \frac{a\cos x + b\sin x}{x^2+1} \le \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{x^2+1}$$

$$-\int_0^1 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{x^2+1}dx \le \int_0^1 \frac{a\cos x + b\sin x}{x^2+1}dx \le \int_0^1 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{x^2+1}dx$$

$$-\sqrt{a^2+b^2}\left(\text{Arctan}\, x\right)_0^1 \le \int_0^1 \frac{a\cos x + b\sin x}{x^2+1}dx \le \sqrt{a^2+b^2}\left(\text{Arctan}\, x\right)_0^1$$

$$-\sqrt{a^2+b^2}\left(\text{Arctan}1\right) \le \int_0^1 \frac{a\cos x + b\sin x}{x^2+1}dx \le \sqrt{a^2+b^2}\left(\text{Arctan}1\right)$$

$$-\frac{\pi}{4}\sqrt{a^2+b^2} \le \int_0^1 \frac{a\cos x + b\sin x}{x^2+1}dx \le \frac{\pi}{4}\sqrt{a^2+b^2}$$

ដូចនេះ $-\frac{\pi}{4}\sqrt{a^2+b^2} \le \int_0^1 \frac{a\cos x + b\sin x}{x^2+1}dx \le \frac{\pi}{4}\sqrt{a^2+b^2}$

លំហាត់ទី១១ ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់

$a)$ បង្ហាញថាបើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍សេសនោះ $F(x)=\int_a^x f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍គូ។

$b)$ បើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍គូ តើ $G(x)=\int_a^x f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍សេសឬទេ ?

ចម្លើយ

$a)$ បង្ហាញថាបើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍សេសនោះ $F(x)=\int_a^x f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍គូ

បើ F ជាអនុគមន៍គូនោះ $F(x)=F(-x) \Leftrightarrow \int_a^x f(t)dt = \int_a^{-x} f(t)dt$

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$

តាង $u=-t \Rightarrow du=-dt$

$t=a \to u=-a$

$t=x \to u=-x$

$F(x)=-\int_{-a}^{-x} f(-u)du$

ប្តូរពី $u \to t$ យើងបាន

$F(x)=-\int_{-a}^{-x} f(-t)dt$

ដោយ $f(t)$ ជាអនុគមន៍សេសនោះ $f(t)=-f(-t)$

$F(x)=\int_{-a}^{-x} f(t)dt$

$=\int_{-a}^{a} f(t)dt + \int_a^x f(t)dt$

ដោយ $f(t)$ ជាអនុគមន៍សេសនោះ $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$ (តាមទ្រឹស្តីបទទី៦)

$F(x)=\int_{a}^{-x} f(t)dt$

$=F(-x)$

ដូចនេះបើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍សេសនោះ $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt, \forall x\in\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍គូ។

$b)$ បើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍គូ តើ $G(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt, \forall x\in\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍សេសឬទេ ?

$G(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt, \forall x\in\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍សេសនោះ $G(-x)=\int_{a}^{-x} f(t)dt=-G(x)=-\int_{a}^{x} f(t)dt$

$G(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$

តាង $v=-t\Rightarrow -dv=dt$

$t=a\rightarrow v=-a$

$t=x\rightarrow v=-x$

$G(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt=-\int_{-a}^{-x} f(-v)dv$

ប្តូពី $v\rightarrow t$

$G(x)=-\int_{-a}^{-x} f(-t)dt$

ដោយ $f(t)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $f(-t)=f(t)$

$G(x)=-\int_{-a}^{-x} f(-t)dt$

- បើ $a=0$ នោះ $G(x)=-\int_{0}^{-x} f(t)dt=-G(-x)$ $\left(G(-x)=\int_{0}^{-x} f(t)dt\right)$

ដូចនេះ $G(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$ ជាអនុគមន៍សេស។

- បើ $a\neq 0$ នោះ $G(x)=-\int_{-a}^{-x} f(t)dt$

$=-\int_{-a}^{a} f(t)dt-\int_{a}^{-x} f(t)dt$

ដោយ $f(t)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $\int_{-a}^{a} f(t)dt=2\int_{0}^{a} f(t)dt$ (តាមទ្រឹស្តីបទទី៦)

$G(x)=-2\int_{0}^{a} f(t)dt-\int_{a}^{-x} f(t)dt$

$=-2\int_{0}^{a} f(t)dt-G(-x)$

$G(x)\neq -G(-x)$

នោះ G មិនគូហើយមិនសេស

ដូចនេះ បើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $G(x)=\int_a^x f(t)dt, \forall x\in\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍សេសពេល $a=0$

លំហាត់ទី១២ ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់

គេឱ្យ $f(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+\cos^2 t}}, \forall x\in\mathbb{R}$

$a)$ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស។

$b)$ គណនា $f(\frac{\pi}{2})-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt$

ចម្លើយ

$a)$ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស

$$f(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+\cos^2 t}}, \forall x\in\mathbb{R}$$

តាង $f(t)=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}$

$$f(-t)=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(-t)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}} \qquad (\cos(-t)=\cos t)$$

$$=f(t)$$

$f(t)$ ជាអនុគមន៍គូ

ដូចនេះ $f(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+\cos^2 t}}, \forall x\in\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍សេស (តាមលំហាត់ទី៥)

$b)$ គណនា $f(\frac{\pi}{2})-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt$

$$f(\frac{\pi}{2})=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt$$

$$f(\frac{\pi}{2})-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt$$

តាង $u=\cos t \Rightarrow du=\sin tdt$

បើ $t=0 \to u=1$

$t=\frac{\pi}{2}\to u=0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt = -\int_1^0 \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$= \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)_0^1$$

$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

ដូចនេះ $f(\frac{\pi}{2}) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt = \ln(1+\sqrt{2})$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

c) បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

តាង $t = \pi - x \Rightarrow -dt = dx$

$x = 0 \to t = \pi$

$x = \pi \to t = 0$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t) f\left[\sin(\pi - t)\right]dt$$

$$= -\int_{\pi}^{0} \pi f(\sin t)dt + \int_{\pi}^{0} tf(\sin t)dt \ \ , \ \left[\sin(\pi - t) = \sin t\right]$$

ប្តូរពី $t \to x$ យើងបាន

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0} \pi f(\sin x)dx + \int_{\pi}^{0} xf(\sin x)dx$$

$$= \int_0^{\pi} \pi f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx + \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$2\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx \ \ (1)$$

$$\Theta \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

យើងមាន $\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx\right]$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx$$

តាង $t=\pi-x \Rightarrow -dt=dx$

$$x=\frac{\pi}{2}\rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

$$x=\pi \rightarrow t=0$$

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left[\sin(\pi-t)\right]dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt$$

ប្តូរពី $t\rightarrow x$ យើងបាន

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx\quad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

Θ គណនា $k=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

យើងមាន $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

$$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

តាង $u=\cos x\rightarrow -du=\sin xdx$

$$x=0\rightarrow u=1$$

$$x=\frac{\pi}{2}\rightarrow u=0$$

$$k = -\pi\int_1^0 \frac{du}{1+u^2}$$
$$= \pi\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$$
$$= \pi Arc\tan u \Big|_0^1$$
$$= \pi Arc\tan 1$$
$$= \pi\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\pi^2}{4}$$
$$\therefore\ \ k = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi^2}{4}$$

លំហាត់ទី១៤ (ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់)

គេឱ្យ $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin nx}{\sin x} & , x>0 \\ n & , x>0 \end{cases} \quad , \forall n \in \mathbb{N}$

តាង $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$

$a)$ បង្ហាញថា $I_{2k+1} = I_{2k-1} \,/\, k \in \mathbb{N}$

$b)$ គណនា I_{2003}

ចម្លើយ

$a)$ បង្ហាញថា $I_{2k+1} = I_{2k-1}$

យើងមាន $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin x} = n$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f_n(x)$ ជាប់លើ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$$
$$I_{2k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{2k+1}(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2k+1)}{\sin x}dx$$
$$I_{2k-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{2k-1}(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2k-1)}{\sin x}dx$$
$$I_{2k+1} - I_{2k-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2k+1)}{\sin x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2k-1)}{\sin x}dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2k+1) - \sin(2k-1)}{\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2kx\cos x+\sin x\cos 2kx-\sin 2kx\cos x+\sin x\cos 2kx}{\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos 2kx}{\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos 2kxdx$$

$$=2\left(\frac{1}{2k}\sin 2kx\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=0$$

$\therefore I_{2k+1}=I_{2k-1}$

$b)$ គណនា I_{2003}

តាម $I_{2k+1}=I_{2k-1}$ យើងបាន

$I_{2003}=I_{2001}=I_{1999}=I_{1997}=\ldots=I_1$

ដូចនេះ $I_{2003}=\frac{\pi}{2}$

លំហាត់ទី១៥ (ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់)

គណនា $I=\int_0^{2\pi}\left(|\sin x|+|\cos x|\right)dx$

ចម្លើយ

គណនា $I=\int_0^{2\pi}\left(|\sin x|+|\cos x|\right)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx-\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}(-\sin x+\cos x)dx$$

$$=(\sin x-\cos x)_0^{\frac{\pi}{2}}+(-\sin x-\cos x)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-(\sin x-\cos x)_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}+(\sin x+\cos x)_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}+\cos 0-\cos\pi+\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{2}-\cos\pi+\cos 2\pi-\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$=1+1-(-1)+1-(-1)-(-1)+1-(-1)$$

$$=8$$

ដូចនេះ $I=\int_0^{2\pi}\left(|\sin x|+|\cos x|\right)dx=8$

លំហាត់ទី១៦ (ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់)

$a)$ បង្ហាញថា $\frac{\pi}{6}\le\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}\le\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

$b)$ បង្ហាញថា $2\sqrt{2}<\int_3^7\frac{dx}{\sqrt{\ln x}}<4$

$c)$ បង្ហាញថា $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[4]{\cos x}dx\right|\le\sqrt[4]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}$

ចម្លើយ

$a)$ បង្ហាញថា $\frac{\pi}{6}\le\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}\le\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

$\forall x\in[0,1]$ យើងបាន

$0\le x^3\le x^2$

$-x^2\le -x^3\le 0$

$4-x^2-x^2\le 4-x^2-x^3\le 4-x^2$

$\sqrt{4-2x^2}\le\sqrt{4-x^2-x^3}\le\sqrt{4-x^2}$

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\le\frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}\le\frac{1}{\sqrt{4-2x^2}}$$

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx\le\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx\le\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-2x^2}}dx$$

$$Arc\sin\frac{x}{2}\Big|_0^1\le\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx\le\frac{1}{\sqrt{2}}Arc\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1$$

$$\frac{\pi}{6}\le\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx\le\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{6}\le\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx\le\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

$b)$ បង្ហាញថា $2\sqrt{2}<\int_3^7\frac{dx}{\sqrt{\ln x}}<4$

$\forall x\in[3,7]$ យើងបាន

$3\le x\le 7$

$e<3\le x\le 7<e^2$

$e<x<e^2$

$1<\ln x<2$

$1<\sqrt{\ln x}<\sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{\ln x}}<1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_3^7 dx<\int_3^7\frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx<\int_3^7 dx$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}}<\int_3^7\frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx<4$$

$$\therefore\ 2\sqrt{2}<\int_3^7\frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx<4$$

$c)$ បង្ហាញថា $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[4]{\cos x}dx\right| \le \sqrt[4]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}$

តាមទ្រឹស្តីបទទី៣ យើងបាន

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[4]{\cos x}dx\right)^2 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt[4]{\cos x}\right)^2 dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}dx$$

$$\Theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}dx$$

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}dx\right)^2 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}dx \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}dx \le \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}$$

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[4]{\cos x}dx\right)^2 \le \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[4]{\cos x}dx \le \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}} = \sqrt[4]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt[4]{\cos x}\right)^2 dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}dx$$

ដូចនេះ $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[4]{\cos x}dx\right| \le \sqrt[4]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}$

លំហាត់ទី១៧ គេឱ្យស្វីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx$ និង $u_n = \frac{u_{n-1}-3}{2}, n\in\mathbb{N}$

$a)$ គេឱ្យ (v_n) ស្វីតកំណត់ដោយ $v_n = u_n+3$ ។ ចូរបង្ហាញថា (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ និងកំណត់ផលធៀបរួមរបស់វា។

$b)$ រក v_n និង u_n ជាអនុគមន៍ n រួចទាញរក $\lim_{x\to+\infty} v_n$ និង $\lim_{x\to+\infty} u_n$

ចម្លើយ

$a)$ គេមាន $v_n = u_n+3$

$$\Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1}+3$$

$$= \frac{u_n-3}{2}+3$$

$$=\frac{1}{2}(u_n+3)$$

$$=\frac{1}{2}v_n$$

$$\therefore \frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q=\frac{1}{2}$

$b)$ រក v_n និង u_n ជាអនុគមន៍ n រួចទាញរក $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

យើងមាន $v_n=u_n+3$

$$v_0=u_0+3$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx+3$$

តាង $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx \quad , \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx$

តាង $I=\frac{\pi}{2}-x$, $-dt=dx$

$$x=0\to t=\frac{\pi}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{2}\to t=0$$

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^5\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^5\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^5\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5 t}{\cos^5 t+\sin^5 t}dt$$

ប្តូរពី $t\to x$ យើងបាន

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5 x}{\cos^5 x+\sin^5 x}dx=J$$

$$\therefore I-J=0 \ (1)$$

$$\Theta\, I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5 x}{\cos^5 x+\sin^5 x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5 x}{\cos^5 x+\sin^5 x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 x + \cos^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore I + J = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$\begin{cases} I - J = 0 \quad (1) \\ I + J = \dfrac{\pi}{2} \quad (2) \end{cases}$$

$$\therefore 2I = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

$$v_0 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + 3 = 4$$

$$\therefore v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

យើងមាន $v_n = u_n + 3$

$$\Rightarrow u_n = v_n - 3$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \right] = -3$$

ដូចនេះ $v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\lim_{x\to+\infty} v_n = 0$

$u_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$, $\lim_{x\to+\infty} u_n = -3$

លំហាត់ទី១៨ (ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់)

គេឱ្យ $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x dx$, $n \in$

$a)$ គណនា I_0

$b)$ បង្ហាញថា $I_n \geq I_{n+1}$, $n \in$

$c)$ បង្ហាញថា $I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} \cdot I_n$, $n \in$

$d)$ គណនា $\lim_{x\to+\infty} I_n$

ចម្លើយ

$a)$ គណនា I_0

$$I_n=\int_0^1 x^n\sin\pi x dx \ \ , n\in$$

$$I_0=\int_0^1 \sin\pi x dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1$$

$$=-\frac{1}{\pi}(-1-1)$$

$$=\frac{2}{\pi}$$

ដូចនេះ $I_0=\frac{2}{\pi}$

$b)$ បង្ហាញថា $I_n\geq I_{n+1}$, $n\in$

$\forall x\in[0,1]$ គេបាន $x^n\geq x^{n+1}$ $,\forall n\in$

$\forall x\in[0,1]$ គេបាន $0\leq\pi x\leq\pi$

$\therefore \sin\pi x\geq 0$

$\forall x\in[0,1]$ គេបាន

$x^n\sin\pi x\geq x^{n+1}\sin\pi x$ $,\forall n\in$

$$\int_0^1 x^n\sin\pi x dx\geq\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x dx$$

$\therefore I_n\geq I_{n+1}$

$c)$ បង្ហាញថា $I_{n+2}=\frac{1}{\pi}-\frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2}\cdot I_n$ $,n\in$

គេមាន $I_{n+2}=\int_0^1 x^{n+2}\sin\pi x dx$ $u=x^{n+2}\to du=(n+2)x^{n+1}$

តាង $u=x^{n+2}\to du=(n+2)x^{n+1}$

$$dv=\sin\pi x\to v=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x$$

$$I_{n+2}=-\frac{1}{\pi}x^{n+2}\cos\pi x\Big|_0^1+\frac{n+2}{\pi}\int_0^1 x^{n+1}\cos\pi x dx$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{n+2}{\pi}\int_0^1 x^{n+1}\cos\pi x dx$$

$$\Theta\int_0^1 x^{n+1}\cos\pi x dx$$

តាង $t=x^{n+1}\to dt=(n+1)x^n$

$$ds = \cos \pi x \to s = \frac{1}{\pi}\sin \pi x$$

$$\int_0^1 x^{n+1}\cos \pi x dx = \frac{1}{\pi}x^{n+1}\sin \pi x\Big|_0^1 - \frac{n+1}{\pi}\int_0^1 x^n \sin \pi x dx$$

$$= -\frac{n+1}{\pi}\cdot I_n$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = \frac{1}{\pi} + \frac{n+2}{\pi}\left(-\frac{n+1}{\pi}\cdot I_n\right)$$

$$\therefore I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2}\cdot I_n$$

$d)$ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n$

យើងមាន $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$

$\forall x \in \mathbb{R}\ , -1 \le \sin \pi x \le 1$

$\forall x \in [0,1]\ , x^n \ge 0$

$\therefore -x^n \le x^n \sin \pi x \le x^n$

$$-\int_0^1 x^n dx \le \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx \le \int_0^1 x^n dx$$

$$-\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 \le \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx \le \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$$

$$-\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right) \le \lim_{x\to+\infty} I_n \le \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$0 \le \lim_{x\to+\infty} I_n \le 0$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} I_n = 0$$

លំហាត់ទី១៩ (ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់)

គេឱ្យ $I_{n,m} = \int_0^1 x^n (1-x)^m\, dx\ \ , n,m \in \mathbb{N}$

$a)$ បង្ហាញថា $I_{n,m} = I_{m,n}$ រួចគណនា $I_{1,5}$

$b)$ បង្ហាញថា $I_{n,m} = \frac{m}{n+1}\cdot I_{n+1,m-1}\ , n \ge 0, m \ge 1$

$c)$ គណនា $I_{n,m}$

ចម្លើយ

$a)$ បង្ហាញថា $I_{n,m} = I_{m,n}$ រួចគណនា $I_{1,5}$

យើងមាន $I_{n,m} = \int_0^1 x^n (1-x)^m\, dx\ \ , n,m \in \mathbb{N}$

តាង $x = 1-t \to dx = -dt$

$x=0\to t=1$

$x=1\to t=0$

$$I_{n,m}=-\int_1^0(1-t)^n\,t^m dt$$

$$=\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$$

$$=I_{m,n}$$

ដូចនេះ $I_{n,m}=I_{m,n}$

Θ គណនា $I_{1,5}$

តាមសម្រាយខាងលើយើងបាន

$$I_{1,5}=I_{5,1}$$

$$=\int_0^1 x^5(1-x)dx$$

$$=\int_0^1(x^5-x^6)dx$$

$$=\left.\frac{x^6}{6}-\frac{x^7}{7}\right|_0^1$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$$

$$=\frac{1}{42}$$

ដូចនេះ $I_{1,5}=\dfrac{1}{42}$

$b)$ បង្ហាញថា $I_{n,m}=\dfrac{m}{n+1}\cdot I_{n+1,m-1}$, $n\ge 0, m\ge 1$

យើងមាន $I_{n,m}=\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

តាង $u=(1-x)^m\to du=-m(1-x)^{m-1}dx$

$dv=x^n dx\to v=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$

$$I_{n,m}=\frac{1}{n+1}(1-x)^m\cdot x^{n+1}\Big|_o^1+\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{m-1}dx=\frac{m}{n+1}I_{n+1,m-1}$$

ដូចនេះ $I_{n,m}=\dfrac{m}{n+1}I_{n+1,m-1}$

c) គណនា $I_{n,m}$

$$I_{n,m}=\frac{m}{n+1}I_{n+1,m-1}$$

$$I_{n+1,m-1}=\frac{m-1}{n+2}I_{n+1,m-1}$$

$$I_{n+2,m-2}=\frac{m-2}{n+3}I_{n+3,m-3}$$

....

....

....

$$I_{n+(m-1),1}=\frac{1}{m+n}I_{n+m,0}$$

គុណអង្គនឹងអង្គ យើងបាន

$$I_{n,m}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots 2\times 1}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\cdot I_{n+m,0}$$

$$I_{n+m,0}=\int_0^1 x^{m+n}dx=\frac{1}{m+n+1}\cdot x^{m+n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{m+n+1}$$

$$I_{n,m}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots 2\times 1}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\cdot\frac{1}{m+n+1}$$

$$=\frac{m!}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(m+n+1)}$$

$$=\frac{m!(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)}{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(m+n+1)}$$

$$=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

ដូចនេះ $I_{n,m}=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$

លំហាត់ទី២០ (ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់)

គេឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $f(x)=f(2a-x)$ ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ ហើយ a ជាចំនួនថេរ ។

a) បង្ហាញថា $\int_a^{a+m} xf(x)dx=2a\int_a^{a+m} f(x)dx \quad ,\forall m>0$

b) គណនា $\int_o^{\pi} x\sin x\cos^4 x dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

a) បង្ហាញថា $\int_a^{a+m} xf(x)dx=2a\int_a^{a+m} f(x)dx \quad ,\forall m>0$

យើងមាន $f(x)=f(2a-x)$ ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ ហើយ a ជាចំនួនថេរ

តាង

$$t = 2a - x \Rightarrow -dt = dx$$
$$x = a - m \Rightarrow t = a + m$$
$$x = a \Rightarrow t = a$$

$$\int_{a-m}^{a+m} xf(x)\,dx = -\int_{a+m}^{a-m} (2a-t)\,f(2a-t)\,dt$$
$$= \int_{a-m}^{a+m} (2a-t)\,f(t)\,dt \qquad , f(2a-t) = f(t)$$
$$= \int_{a-m}^{a+m} (2a-t)\,dt - \int_{a-m}^{a+m} tf(t)\,dt$$
$$= 2a\int_{a-m}^{a+m} f(t)\,dt - \int_{a-m}^{a+m} tf(t)\,dt$$
$$= 2a\int_{a-m}^{a+m} f(x)\,dx - \int_{a-m}^{a+m} xf(x)\,dx$$

$$2\int_{a-m}^{a+m} xf(x)\,dx = 2a\int_{a-m}^{a+m} f(x)\,dx$$

$$\int_{a-m}^{a+m} xf(x)\,dx = a\int_{a-m}^{a+m} f(x)\,dx = a\int_{a-m}^{a} f(x)\,dx + a\int_{a}^{a+m} f(x)\,dx \qquad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $\int_{a-m}^{a} f(x)\,dx$

តាង

$$t = 2a - x \Rightarrow -dt = dx$$
$$x = a - m \Rightarrow t = a + m$$
$$x = a \Rightarrow t = a$$

$$\int_{a-m}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a+m}^{a} f(2a-t)\,dt = \int_{a}^{a+m} f(t)\,dt = \int_{a}^{a+m} f(x)\,dx$$

$$\int_{a-m}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{a+m} f(x)\,dx \qquad (2)$$

តាម $(1) \& (2)$ យើងបាន

$$\int_{a-m}^{a+m} xf(x)\,dx = a\int_{a}^{a+m} f(x)\,dx + a\int_{a}^{a+m} f(x)\,dx = 2a\int_{a}^{a+m} f(x)\,dx$$

ដូចនេះ $\int_{a}^{a+m} xf(x)\,dx = 2a\int_{a}^{a+m} f(x)\,dx$

b) គណនា $\int_{o}^{\pi} x\sin x\cos^4 x\,dx$

តាង $f(x) = \sin x\cos^4 x$

យើងមាន

$$\sin x = \sin(\pi - x) = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2} - x\right), \forall x \in \mathbb{R}$$
$$= f\left(2\cdot\frac{\pi}{2} - x\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\pi} x\sin x\cos^4 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} xf\left(2\cdot\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

$$= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$$

$$= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\cos^4 x dx$$

$$= -\frac{\pi}{5}\cos^5 x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{5}$$

លំហាត់ទី២១ (ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់)

គេឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់លើ

a) បង្ហាញថា $\int_0^a x^3 f\left(x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$

b) គណនា $\int_0^1 x^3 \arctan x^2 dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

a) បង្ហាញថា $\int_0^a x^3 f\left(x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$

តាង $t = x^2 \Rightarrow \frac{1}{2}dt = xdx$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = a \Rightarrow t = a^2$

$$\int_0^a x^3 f\left(x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)dt$$

ប្តូរពី $t \to x$

ដូចនេះ $\int_0^a x^3 f\left(x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$

b) គណនា $\int_0^1 x^3 \arctan x^2 dx$

តាង $f(x) = \arctan x \Rightarrow f\left(x^2\right) = \arctan x^2$

$$\int_0^1 x^3 \arctan x^2 dx = \int_0^1 x^3 f\left(x^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\arctan x dx$$

តាង $u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx$

$dv = x \Rightarrow v = \frac{1}{2}x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 x\arctan xdx = \frac{1}{4}x^2\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x\arctan xdx$$

$$= \frac{1}{4}\arctan 1 - \frac{1}{4}\int_0^1 dx + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{4}\arctan 1 - \frac{1}{4}x\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\arctan x\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi-2}{8}$$

ដូចនេះ $\int_0^1 x^3\arctan x^2 dx = \frac{\pi-2}{8}$

លំហាត់ទី២២ (ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់)

គេឱ្យ $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}}dx, m$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត ។

a) កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យមានអាំងតេក្រាល I ។

b) គណនា I ពេល $m > -1$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

a) កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យមានអាំងតេក្រាល I

ដើម្បីឱ្យ I មានអថេរភាព លុះត្រាតែ

$f(x) = \frac{x\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}}$ ជាប់លើ $[0,\pi]$

$m\cos^2 x + m + 2 > 0 \quad ,\forall x \in [0,\pi]$

តាង $t = \cos^2 x \to 0 \le t \le 1$

$\Rightarrow m\cos^2 x + m + 2 = mt + m + 2, \forall t \in [0,\pi]$

យក $A(0, m+2) \quad , B(1, 2m+2)$

គេបាន $[AB]$ ជាអង្កត់តាងដោយសមីការ $y = mt + m + 2, t \in [0,1]$ ទាំងស្រុងពោលគឺ

ដើម្បី $mt + m + 2 > 0 \ , t \in [0,1]$ លុះត្រាតែ $[AB]$ នៅខាងលើអ័ក្ស $(x'ox)$ ទាំងស្រុងពោលគឺ

$$\begin{cases} y_A > 0 \\ y_B > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+2 > 0 \\ m+1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m > -2 \\ m > -1 \end{cases}$$

$m > -1$

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យមានអាំងតេក្រាល I លុះត្រាតែ $m > -1$ ។

b) គណនា I ពេល $m > -1$

យើងមាន $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}}dx$

តាង $\quad t = \pi - x \to -dt = dx$

$$x = 0 \to t = \pi$$

$$x = \pi \to t = 0$$

$$I = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{\sqrt{m\cos^2(\pi - t) + m + 2}} dt$$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{\sqrt{m\cos^2(\pi - t) + m + 2}} dt$$

ប្តូរពី $t \to x$ យើងបាន

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{\sqrt{m\cos^2(\pi - x) + m + 2}} dx$$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{\pi \sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}} dx - \int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}} dx$$

$$= \pi\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}} dx - I$$

$$2I = \pi\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}} dx$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}} dx$$

តាង $u = \cos x \to -du = \sin x dx$

$$x = 0 \to u = 1$$

$$x = \pi \to u = -1$$

$$I = -\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{-\sin x}{\sqrt{m\cos^2 x + m + 2}} dx = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{mu^2 + m + 2}} dx$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{mu^2 + m + 2}}$$

តាង $f(u) = \dfrac{1}{\sqrt{mu^2 + m + 2}}$

$$f(-u) = \frac{1}{\sqrt{m(-u)^2 + m + 2}} = \frac{1}{\sqrt{mu^2 + m + 2}}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(u)$ ជាអនុគមន៍គូ ។

តាមទ្រឹស្តីបទទី៦ យើងបាន

$$I = 2 \cdot \frac{\pi}{2}\int_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{mu^2 + m + 2}} = \pi\int_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{mu^2 + m + 2}}$$

- បើ $-1 < m < 0$ គេបាន

$$I = \pi\int_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{mu^2 + m + 2}}$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{m\left(u^2 + \frac{m+2}{m}\right)}}$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{-m\left(-u^2 + \frac{m+2}{-m}\right)}}$$

$$= \pi \frac{1}{\sqrt{-m}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{m+2}{m}}\right)^2 - u^2}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{-m}} \arcsin \sqrt{\frac{-m}{m+2}} \cdot u \Big|_0^1$$

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{-m}} \arcsin \sqrt{\frac{-m}{m+2}}$$

- បើ $m = 0$ គេបាន

$$I = \pi \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} u \Big|_0^1$$

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

- បើ $m > 0$ គេបាន

$$I = \pi \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{mu^2 + m + 2}}$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{m\left(u^2 + \frac{m+2}{m}\right)}}$$

$$= \pi \frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2 + \left(\sqrt{\frac{m+2}{m}}\right)^2}}$$

$$= \left[\frac{\pi}{\sqrt{m}} \ln\left(u + \sqrt{u^2 + \frac{m+1}{m}}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{m}} \ln\left(1 + \sqrt{1^2 + \frac{m+1}{m}}\right) - \frac{\pi}{\sqrt{m}} \ln\left(\sqrt{\frac{m+1}{m}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{m}} \ln\left(\frac{\sqrt{m} + \sqrt{2m+2}}{\sqrt{m}}\right) - \frac{\pi}{\sqrt{m}} \ln\left(\sqrt{\frac{m+1}{m}}\right)$$

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{m}} \ln\left(\frac{\sqrt{m} + \sqrt{2m+2}}{\sqrt{m+2}}\right)$$

លំហាត់ទី២៣ (ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់)

គេឱ្យអាំងតេក្រាលកំណត់ $I_n = \int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2xdx$, $J_n = \int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi} -e^{-x}\sin 2xdx$, $n \in$

a) ចំពោះ $\forall n > 0$ បង្ហាញថា I_n & J_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

b) តាង $S_n = \sum_{k=0}^{n} I_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} J_k$ រួចគណនា $\lim_{x\to\infty} S_n$, $\lim_{x\to\infty} T_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

a) បង្ហាញថា I_n & J_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ចំពោះ $\forall n > 0$

$$I_n = \int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2xdx$$

តាង $u = \sin 2xdx \Rightarrow du = 2\cos 2xdx$

$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow I_n = -e^{-x}\sin 2x\Big|_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} + 2\int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2xdx$$

$$= 2\int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2xdx \quad \left(-e^{-x}\sin 2x\Big|_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} = 0\right)$$

$$I_n = 2\int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2xdx$$

តាង $t = \cos 2x \Rightarrow dt = -2\sin 2xdx$

$$ds = e^{-x}dx \Rightarrow s = -e^{-x}$$

$$I_n = -2e^{-x}\cos 2x\Big|_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} - 4\int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2xdx$$

$$= 2e^{-nx}\cos 2n\pi - 2e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}}\cos(2n+1)\pi - 4I_n$$

$$5I_n = 2e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}} + 2e^{-n\pi}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2}{5}\left(e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}} + e^{-n\pi}\right)$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{2}{5}\left(e^{-(2n+3)\frac{\pi}{2}} + e^{-n\pi-\pi}\right)$$

$$I_{n+1} = \frac{2}{5}\left(e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}}e^{-\pi} + e^{-n\pi}e^{-\pi}\right)$$

$$I_{n+1} = e^{-\pi}\cdot\frac{2}{5}\left(e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}} + e^{-n\pi}\right) = e^{-\pi}I_n$$

$$\Rightarrow \frac{I_{n+1}}{I_n} = e^{-\pi}$$

ដូចនេះ (I_n) ជាស៊្វីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុង $q=e^{-\pi}$ ។

$$J_n=\int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi}-e^{-x}\sin 2xdx=\int_{(n+1)\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin 2xdx$$

តាង $u=\sin 2xdx\Rightarrow du=2\cos 2xdx$

$$dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}$$

$$\Rightarrow J_n=-e^{-x}\sin 2x\Big|_{(n+1)\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}+2\int_{(n+1)\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos 2xdx$$

$$=2\int_{(n+1)\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos 2xdx\quad\left(-e^{-x}\sin 2x\Big|_{(n+1)\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}=0\right)$$

$$J_n=2\int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos 2xdx$$

តាង $t=\cos 2x\Rightarrow dt=-2\sin 2xdx$

$$ds=e^{-x}dx\Rightarrow s=-e^{-x}$$

$$J_n=-2e^{-x}\cos 2x\Big|_{(n+1)\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}-4\int_{(n+1)\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin 2xdx$$

$$=2e^{-(n+1)x}\cos 2(n+1)\pi-2e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}}\cos(2n+1)\pi-4J_n$$

$$5J_n=2e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}}+2e^{-(n+1)\pi}$$

$$\Rightarrow J_n=\frac{2}{5}\left(e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}}+e^{-(n+1)\pi}\right)$$

$$\Rightarrow I_{n+1}=\frac{2}{5}\left(e^{-(2n+3)\frac{\pi}{2}}+e^{-(n+1)\pi-\pi}\right)$$

$$I_{n+1}=\frac{2}{5}\left(e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}}e^{-\pi}+e^{-(n+1)\pi}e^{-\pi}\right)$$

$$J_{n+1}=e^{-\pi}\cdot\frac{2}{5}\left(e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}}+e^{-(n+1)\pi}\right)=e^{-\pi}J_n$$

$$\Rightarrow\frac{J_{n+1}}{J_n}=e^{-\pi}$$

ដូចនេះ (J_n) ជាស៊្វីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុង $q=e^{-\pi}$ ។

b) តាង $S_n=\sum_{k=0}^{n}I_k$, $T_n=\sum_{k=0}^{n}J_k$ រួចគណនា $\lim_{x\to\infty}S_n$, $\lim_{x\to\infty}T_n$

ដោយ $(I_n),(J_n)$ ជាស៊្វីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុង $q=e^{-\pi}$

$$S_n=I_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}\ ,\ T_n=J_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

ដោយ $0<q<e^{-\pi}<1\Rightarrow q^n\to 0$ ពេល $n\to+\infty$

$$\lim_{x\to\infty} S_n = \frac{I_1}{1-q} \text{ និង } \lim_{x\to\infty} T_n = \frac{J_1}{1-q}$$

$$I_n = \frac{2}{5}\left(e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}} + e^{-n\pi}\right) \quad , \; J_n = \frac{2}{5}\left(e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}} + e^{-(n+1)\pi}\right)$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\infty} S_n = \frac{I_1}{1-q} = \frac{2}{5}\cdot\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi} + e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}$

$$\lim_{x\to\infty} T_n = \frac{J_1}{1-q} = \frac{2}{5}\cdot\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi} + e^{-2\pi}}{1-e^{-\pi}}$$ ។

លំហាត់ទី២៤ (ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់)

a) បង្ហាញថា $\int_0^n \sqrt{x}dx \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \int_1^{n+1}\sqrt{x}dx \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$

b) ពីលទ្ធផលខាងលើបង្ហាញថា

1) $666.6 < \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} < 667$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right) = \frac{2}{3}$, $\left((10.049)^2 = 101\right)$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

a) បង្ហាញថា $\int_0^n \sqrt{x}dx \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \int_1^{n+1}\sqrt{x}dx \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall x \in [k-1,k], k-1 \le x \le k$

$$\sqrt{x} \le \sqrt{k}$$

$$\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}dx \le \int_{k-1}^{k}\sqrt{k}dx$$

បើ $k=1 \quad \int_0^1 \sqrt{x}dx \le \sqrt{1}$

$k=2 \quad \int_1^2 \sqrt{x}dx \le \sqrt{2}$

$k=3 \quad \int_2^3 \sqrt{x}dx \le \sqrt{3}$

....
....

....

$k=n \quad \int_{n-1}^{n} \sqrt{x}dx \le \sqrt{n}$

បូកអង្គនឹងអង្គ យើងបាន

$$\int_0^1\sqrt{x}dx+\int_1^2\sqrt{x}dx+\int_2^3\sqrt{x}dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}\sqrt{x}dx\le\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}$$

$$\int_0^n\sqrt{x}dx\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$$

$$\forall x\in[k,k+1],k\le x\le k+1$$

$$\sqrt{k}\le\sqrt{x}$$

$$\int_k^{k+1}\sqrt{k}dx\le\int_k^{k+1}\sqrt{x}dx\qquad(1)$$

បើ $k=1\quad\sqrt{1}\le\int_1^2\sqrt{x}dx$

$k=2\quad\sqrt{2}\le\int_2^3\sqrt{x}dx$

$k=3\quad\sqrt{3}\le\int_3^4\sqrt{x}dx$

....

....

$k=n\quad\sqrt{n}\le\int_n^{n+1}\sqrt{x}dx$

បូកអង្គនឹងអង្គ យើងបាន

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\le\int_0^1\sqrt{x}dx+\int_1^2\sqrt{x}dx+\int_2^3\sqrt{x}dx+\cdots+\int_n^{n+1}\sqrt{x}dx$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\le\int_1^{n+1}\sqrt{x}dx\qquad(2)$$

តាម $(1)\&(2)$ យើងបាន

$$\int_0^n\sqrt{x}dx\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\le\int_1^{n+1}\sqrt{x}dx\quad,\forall n\in\mathbb{N}$$

b) ពីលទ្ធផលខាងលើបង្ហាញថា

1) $666.6<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<667,\ \left((10.049)^2=101\right)$

$$\int_0^n\sqrt{x}dx\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\le\int_1^{n+1}\sqrt{x}dx$$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^n\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\le\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{n+1}$$

យក $n=100$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{100}\le\sum_{k=1}^{100}\sqrt{k}\le\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{101}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\left(100^{\frac{3}{2}}-0\right)\le\sum_{k=1}^{100}\sqrt{k}\le\frac{2}{3}\cdot\left(101^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

$$\frac{2}{3}\cdot 10^3 \le \sum_{k=1}^{100}\sqrt{k} \le \frac{2}{3}\cdot\left((10.049)^3-1\right) \quad \left((10.049)^2=101\right)$$

$$666.6 < \frac{20010}{3} \le \sum_{k=1}^{100}\sqrt{k} \le \frac{2}{3}\cdot\left((10.049)^3-1\right)$$

$$666.6 \le \sum_{k=1}^{100}\sqrt{k} \le 675.84 < 676$$

$$666.6 \le \sum_{k=1}^{100}\sqrt{k} \le 676$$

ដូចនេះ $666.6 \le \sum_{k=1}^{100}\sqrt{k} \le 676$ ។

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)=\frac{2}{3}$

$$\int_0^n \sqrt{x}dx \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \int_0^{n+1}\sqrt{x}dx$$

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n^3} \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{(n+1)^3}-1\right)$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\sqrt{n^3}$

$$\frac{2}{3} \le \frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{(n+1)^3}-1}{\sqrt{n^3}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3} \le \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{(n+1)^3}-1}{\sqrt{n^3}}\right)$$

$$\frac{2}{3} \le \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)=\frac{2}{3}$ ។

លំហាត់ទី ២៥ (ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់)

គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់បាន $\forall n\in\mathbb{N}$ ដែល $u_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+2x+4x^2}dx$ ។

a) បង្ហាញថា $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\ge 0$ រួចសិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីត (u_n) ។

b) កំណត់ចំនួនពិត a ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{x^n}{1+2x+4x^2}\le a,\ \forall x\in[0,1]$ រួចទាញ $\lim_{x\to+\infty}u_n$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

a) - បង្ហាញថា $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\ge 0$ រួចសិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីត (u_n)

(u_n) កំណត់ដោយ $u_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+2x+4x^2}dx\ ,\forall n\in\mathbb{N}$

$\forall x \in [0,1]$ $\quad 0 \le x \le 1$

$x^n \ge 0$

$\int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}dx \ge 0$

$u_n \ge 0$

ដូចនេះ $u_n \ge 0$

- សិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីត (u_n)

គេមាន $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}dx$

$u_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+2x+4x^2}dx$

$\forall n \in [0,1]\, x^n \ge x^{n+1}$

$\frac{x^n}{1+2x+4x^2} \ge \frac{x^{n+1}}{1+2x+4x^2}$

$\int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}dx \ge \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+2x+4x^2}$

$u_n \ge u_{n+1}$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

b) កំណត់ចំនួនពិត a ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{x^n}{1+2x+4x^2} \le a,\ \forall x \in [0,1]$ រួចទ្រាក $\lim_{x\to+\infty} u_n$

តាង $f(x) = 4x^2 + 2x + 1$

$f(x) = 8x + 2$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{4}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	0	1	
$f(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{3}{4}$	↗		$+\infty$

តាមតារាងខាងលើ យើងបាន

f កើនលើ $[0,1]$

$\forall x \in [0,1]$ $\quad f(0) \le f(x) \le f(1)$

$1 \le f(x) \le 7$

$\frac{1}{7} \le \frac{1}{f(x)} \le 1$

ដូចនេះ មាន $a=1, \frac{1}{1+2x+4x^2}\le a, \forall x\in[0,1]$

- ទាញរក $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

តាមសំណួរ $a)$ យើងបាន $0\le u_n \ (1)$

យើងមាន $\frac{1}{1+2x+4x^2}\le 1$

$$\frac{1}{1+2x+4x^2}\le x^n$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2x+4x^2}dx \le \int_0^1 x^n dx$$

$$u_n \le \frac{1}{n+1} \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$0\le u_n \le \frac{1}{n+1}$$

$$0\le \lim_{x\to+\infty} u_n \le \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n+1}$$

$$0\le \lim_{x\to+\infty} u_n \le 0$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0$

លំហាត់ទី ២៦ (ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់)

គេឱ្យ $I_n=\int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}dx \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$a)$ គណនា I_n រួចបង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

$b)$ គេតាង $S_n = I_0+I_1+I_2+...+I_n$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

ចម្លើយ

$a)$ គណនា I_n រួចបង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

យើងមាន $I_n=\int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}dx \quad \forall n\in\mathbb{N}$

តាង $u=x+1\Rightarrow du=dx$

$$dv=e^{-x}dx \Rightarrow v=-e^{-x}$$

$$I_n=-(x+1)e^{-x}\Big|_n^{n+1}+\int_n^{n+1}e^{-x}dx$$

$$=(n+1)e^{-n}-(n+2)e^{-(n+1)}-e^{-x}\Big|_n^{n+1}$$

$$=(n+1)e^{-n}-(n+2)e^{-(n+1)}-e^{-n+1}+e^{-n}$$

$$=(n+1)e^{-n}-(n+3)e^{-(n+1)}$$

ដូចនេះ $I_n = (n+1)e^{-n} - (n+3)e^{-(n+1)}$

- បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\left((n+2)e^{-n} - (n+3)e^{-(n+1)}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{e^n} - \frac{n+3}{e^{n+1}}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{e^n} - \lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{e^{n+1}}$$
$$= 0$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

$b)$ គេតាង $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + \ldots + I_n$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$I_n = \int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}dx$$
$$S_n = \int_0^{n+1}(x+1)e^{-x}dx + \int_1^2(x+1)e^{-x}dx + \int_2^3(x+1)e^{-x}dx + \ldots + \int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}dx$$
$$= \int_0^{n+1}(x+1)e^{-x}dx$$

តាង $t = x+1 \Rightarrow dt = dx$

$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$
$$S_n = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^{n+1} + \int_0^{n+1}e^{-x}dx$$
$$= 1-(x+2)e^{-(n+1)} + e^{-x}\Big|_0^{n+1} = 1-(x+2)e^{-(n+1)} - e^{-(n+1)} + 1$$
$$= 2-(x+2)e^{-(n+1)} - e^{-(n+1)} = 2 - \frac{n+2}{e^{(n+1)}} - \frac{1}{e^{(n+1)}}$$
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{n+2}{e^{(n+1)}} - \frac{1}{e^{(n+1)}}\right) = 2 - \lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{e^{(n+1)}} - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{(n+1)}} = 2$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$

លំហាត់ទី ២៧ (ការគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់)

$a)$ បង្ហាញថា $\forall x \ge 0$ គេបាន $e^x \ge 1+x$

$b)$ បង្ហាញថា $\forall x \ge 0$ $\forall n \in \angle$ គេបាន $e^x \ge 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

$c)$ បង្ហាញថា $\forall x \ge 0$ $\forall n \in \angle$ គេបាន $e \ge \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots + \frac{1}{(n+1)!}$

ចម្លើយ

$a)$ បង្ហាញថា $\forall x \ge 0$ គេបាន $e^x \ge 1+x$

តាង $f(x) = e^x - x - 1$

$f'(x)=e^x-1 \quad \forall x\geq 0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើន $\forall x\geq 0$

គេបាន $\forall x\geq 0$ $f(x)\geq f(0)=0$

$f(x)=e^x-x-1\geq 0$

$\therefore \; e^x\geq x+1$

ដូចនេះ $\forall x\geq 0$ គេបាន $e^x\geq x+1$

$b)$ បង្ហាញថា $\forall x\geq 0 \;\; \forall n\in \angle$ គេបាន $e^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}$

- បើ $n=0$ គេបាន $e^x\geq 1$ ពិតចំពោះ $\forall x\geq 0$
- បើ $n=1$ តាមសំណួរ $a)$ គេបាន $e^x\geq x+1$ ពិតចំពោះ $\forall x\geq 0$

……………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………….

- ឧបមាថាពិតដល់ គេបាន

$$e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^k}{k!} \quad \forall x\geq 0 \; (*)$$

យើងនិងស្រាយថាឱ្យវាពិតដល់ $n=k+1$ គឺស្រាយថា

$$e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall x\geq 0$$

តាម $(*)$ គេបាន

$$\int_0^x e^t dt\geq \int_0^x\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+...+\frac{t^k}{k!}\right)dt \quad \forall x\geq 0$$

$$e^x-1\geq x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

ដូចនេះ ចំពោះ $\forall x\geq 0,\forall n\in$ □ គេបាន $e^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}$

$c)$ បង្ហាញថា $\forall x\geq 0 \;\; \forall n\in \angle$ គេបាន $e\geq \dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}...+\dfrac{1}{(n+1)!}$

តាម $b)$ គេមាន $e^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}$ ចំពោះ $\forall x\geq 0,\forall n\in$ □

ដូចនេះ $\forall x\in[0,1],\forall n\in$ □ $:e^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}$

$$\int_0^1 e^x dx \ge \int_0^1 \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)dx$$

$$e^x\Big|_0^1 \ge x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Bigg|_0^1$$

$$e-1 \ge 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}...+\frac{1}{(n+1)!}$$

$$e \ge 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}...+\frac{1}{(n+1)!}$$

$$e \ge \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}...+\frac{1}{(n+1)!}$$

បង្ហាញថា $\forall n \in \mathbb{N}$ គេបាន $e \ge \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}...+\frac{1}{(n+1)!}$

លំហាត់ទី ២៨ (ការអនុវត្តលើគណិតវិទ្យា)

បើ $f(x)$ កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}}$ ។

គណនា $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ ។

ចម្លើយ

[វិធីទី១]

បើយើងយក $f^{-1}(x)=t$ នោះយើងបាន $f(t)=x$ ដូចនេះ $x=\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{1+t^2}}$ $\quad ...(i)$

$$dx=\frac{1}{1+t^2}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+t^2}-\sqrt{2}t\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\cdot 2t\right)dt=\frac{\sqrt{2}}{1+t^2}\left(\sqrt{1+t^2}-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{(1+t^2)\left(\sqrt{1+t^2}\right)}dt$$

$$=\sqrt{2}\left(1+t^2\right)^{\frac{-3}{2}}dt$$

ពេល $x=0$ និង 1 យើងបាន $t=0$ និង 1 តាម (i)

ដូចនេះ $\int_0^1 f^{-1}(x)dx=\int_0^1 t\cdot\sqrt{2}\left(1+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1\left(1+t^2\right)'\left(1+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}dt$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[-2(1+t)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^1$$

$$=-1+\sqrt{2}$$

[វិធីទី២]

យក $y=f^{-1}(x)$ នោះ

$$f(y)=x$$

$$\frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{1+y^2}}=x$$

នោះ

$$x^2\left(1+y^2\right)=2y^2$$

$$\left(2-x^2\right)y^2=x^2$$

ដោយ $y\geq 0$ ចំពោះ $x\geq 0$ យើងបាន

$$y=\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\text{ ដែល } 0\leq x\leq 1$$

ដូចនេះ $\int_0^1 f^{-1}(x)dx=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}dx=\int_0^1\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\left(2-x^2\right)'}{\sqrt{2-x^2}}dx$

$$=-\frac{1}{2}\left[2\sqrt{2-x^2}\right]_0^1$$

$$=-1+\sqrt{2}$$

លំហាត់ទី ២៩ (ការអនុវត្តលើគណិតវិទ្យា)

តាង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ បើយើងកំណត់ I_n ដោយ $I_n=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-|x|\right)\cos nxdx$

កំណត់តម្លៃ $I_1+I_2+I_3+I_4$ ។

ចម្លើយ

$$I_n=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-|x|\right)\cos nxdx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx-\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nxdx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx-\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx-\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx$$

ប៉ុន្តែ

$$I_n=\frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}+\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}-\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_{0}^{\pi}-\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}$$

$$=0+0+\frac{1}{n^2}\{1-(-1)^n\}-0-\frac{1}{n^2}\{(-1)^n-1\}$$

$$=\frac{2}{n^2}\{1-(-1)^n\}$$

ដូចនេះ $I_1+I_2+I_3+I_4=4+0+\frac{4}{9}+0=\frac{40}{9}$

លំហាត់ទី ៣០ (ការអនុវត្តលើគណិតវិទ្យា)

តាង a គេជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន។ បើ $0\le t\le 1$ រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $\int_0^{\pi}\left(ax-t\sin x\right)^2 dx$

ចម្លើយ

យក $f\left(t\right)=\int_0^{\pi}\left(ax-t\sin x\right)^2 dx$ នោះ

$$f\left(t\right)=\int_0^{\pi}\left(a^2x^2-2axt\sin x-t^2\sin^2 x\right)dx$$

$$=a^2\int_0^{\pi}x^2dx-2at\int_0^{\pi}x\sin xdx+t^2\int_0^{\pi}\sin^2 dx$$

ប៉ុន្តែ

$$a^2\int_0^{\pi}x^2dx=a^2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}=\frac{a^2\pi^3}{3}$$

$$2at\int_0^{\pi}x\sin xdx=2at\left[-x\cos x\right]_0^{\pi}-2at\int_0^{\pi}\left(-\cos x\right)dx=2at\pi-2at\left[-\sin x\right]_0^{\pi}$$

$$=2a\pi t$$

$$t^2\int_0^{\pi}\sin^2 xdx=t^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=t^2\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}t^2$$

ដូចនេះ $f\left(t\right)=\frac{a^2\pi^3}{3}-2a\pi t+\frac{\pi}{2}t^2$

$=\frac{\pi}{2}\left(t-2a\right)^2-2a^2\pi+\frac{a^3\pi^3}{3}$ ដែល $0\le t\le 1$

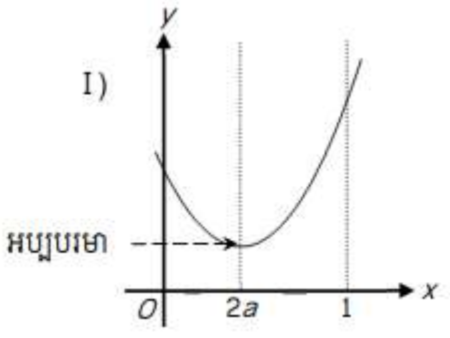
ដូចនេះ

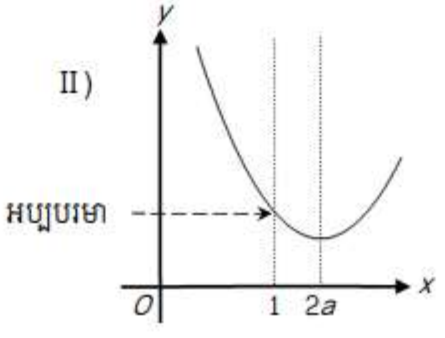
$i)$ ពេល $0<2a\le 1$ អនុគមន៍ $f\left(t\right)$ អប្បបរមាត្រង់ $t=2a$ ។ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមាគឺ

$ii)$ ពេល $1<2a$ អនុគមន៍ $f\left(t\right)$ អតិបរមាត្រង់។ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមាគឺ

$$f(1)=\frac{a^2\pi^2}{3}-2\pi a+\frac{\pi}{2}$$

ករណី i) និង ii) ខាងលើបង្ហាញក្នុងរូប I) និង II) ខាងក្រោម:





លំហាត់ទី ៣១ (ការអនុវត្តលើគណិតវិទ្យា)

កំណត់តម្លៃអតិបរិមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍

$F(t)=\int_t^{t+\frac{\pi}{2}}|\sin 2x+2\cos x|\,dx$ ដែល $0\le t\le \frac{\pi}{2}$ ។

ចម្លើយ

ដោយ $\sin 2x+2\cos x=2\cos x(\sin+1)$ យើងបាន

$\sin 2x+2\cos x\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos x\ge 0$

$\sin 2x+2\cos x\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos x\le 0$

ហើយ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$ យើងបាន $0\le t\le \frac{\pi}{2}\le t+\frac{\pi}{2}\le \pi$

ដូចនេះ

$$F(t)=\int_t^{t+\frac{\pi}{2}}|\sin 2x+2\cos x|\,dx$$

$$=\int_t^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin 2x+2\cos x\right)dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{t+\frac{\pi}{2}}\left(\sin 2x+2\cos x\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+2\sin x\right]_t^{\frac{\pi}{2}}-\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+2\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{t+\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+2\right)-\left(-\frac{1}{2}\cos 2t+2\sin t\right)-\left(-\frac{1}{2}\cos 2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+2\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)+\left(\frac{1}{2}+2\right)$$

$$=5+\frac{1}{2}\cos 2t-2\sin t-\frac{1}{2}\cos 2t-2\cos t$$

$$=5-2\left(\sin t+\cos t\right)$$

$$=5-2\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

ដោយ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$ យើងបាន $\frac{\sqrt{2}}{2}\le \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$

$\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow t=0,\frac{\pi}{2}$

$\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ

$F(t)$ មានអតិបរមាត្រង់ $t=0, t=\frac{\pi}{2}$ និងតម្លៃអតិបរមាគឺ□

$F(t)$ មានអប្បបរមាត្រង់ $t=\frac{\pi}{4}$ និងតម្លៃអប្បបរមាគឺ $5-2\sqrt{2}$

លំហាត់ទី ៣២ (ការអនុវត្តលើគណិតវិទ្យា)

រកតម្លៃអតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $f\left(x\right)=x^3+3\int_0^1|\sqrt{t}-x|\,dt$

ចម្លើយ

$i)$ ពេល $x\le 0$ យើងបាន

$|\sqrt{t}-x|=\sqrt{t}-x$ ចំពោះ $0\le t\le 1$

ដូចនេះ

$$f\left(x\right)=x^3+3\int_0^1|\sqrt{t}-x|\,dt=x^3+3\int_0^1\left(\sqrt{t}-x\right)dt$$

$$=x^3+3\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-xt\right]_0^1$$

$$=x^3-3x+2$$

$ii)$ ពេល $x\le 0\le 1$ យើងបាន

$|\sqrt{t}-x|=-\left(\sqrt{t}-x\right)$ ចំពោះ $0\le t\le x^2$

$|\sqrt{t}-x|=\sqrt{t}-x$ ចំពោះ $x^2\le t\le 1$

ដូចនេះ

$$f\left(x\right)=x^3+3\int_0^1(\sqrt{t}-x)dt$$

$$=x^3-3\int_0^{x^2}(\sqrt{t}-x)dx+3\int_{x^2}^1(\sqrt{t}-x)dt$$

$$=x^3-3\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-xt\right]_0^{x^2}+3\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-xt\right]_{x^2}^1$$

$$=x^3-3\left(\frac{2}{3}x^3-x^3\right)+3\left(\frac{2}{3}-x-\frac{2}{3}x^3+x^3\right)$$

$$=3x^3-3x+2$$

$iii)$ ពេល $1\le x$ យើងបាន

$|\sqrt{t}-x|=-\left(\sqrt{t}-x\right)$

ដូចនេះ

$$f\left(x\right)=x^3+3\int_0^1(\sqrt{t}-x)dt=x^3-3\int_0^1(\sqrt{t}-x)dt$$

$$=x^3-3\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-xt\right]_0^1$$

$$=x^3+3x-2$$

ដូចនេះដេរីវេនៃ $f\left(x\right)$ ក្នុងតម្លៃនីមួយៗក្នុងចន្លោះ

$f'\left(x\right)=3\left(x^2-1\right)$ ចំពោះ $x<0$

$3\left(3x^2-1\right)$ ចំពោះ $0<x<1$

$3\left(x^2+1\right)$ ចំពោះ $1<x$

ដូចនេះយើងបានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម៖

x		-1		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\searrow$	$2-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$

ដូចនេះ

អតិបរមាធៀប $f(-1)=4$

អប្បបរមាធៀប $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2-\frac{2}{\sqrt{3}}$

លំហាត់ទី ៣៣ (ការអនុវត្តលើគណិតវិទ្យា)

រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $f(x)=\int_1^t|\ln t-x|\,dt$ ដែល $x>0$។

ចម្លើយ

ឧបមាថា k ជាចំនួនពិតមួយដែល $\ln k=x$ នោះយើងបាន $k=e^x$

$i)$ ពេល $1<k<e$ យើងបាន $0<x<1$

$\ln t-x\le 0$ ចំពោះ $1\le t\le k$

$\ln t-x\ge 0$ ចំពោះ $k\le t\le e$

ដូចនេះ

$$f(x)=\int_1^e|\ln t-x|\,dt=-\int_1^k(\ln t-x)dt+\int_k^e(\ln t-x)dt$$

$$=-\left[t\ln t-t-xt\right]_1^k+\left[t\ln t-t-xt\right]_k^e$$

$$=-(k\ln k-k-kx)+(0-1-x)+(e-e-ex)-(k\ln k-k-kx)$$

$$=-2k\ln k+2k+2kx-1-x-ex$$

$$=-2e^x x+2e^x+2e^x x-1-x-ex$$

$$=2e^x-(e+1)x-1$$

$ii)$ ពេល $e<k$ យើងបាន $1\le x$ នោះ $\ln t-x\le 0$

ដូចនេះ

$$f(x)=\int_1^e|\ln t-x|\,dt=-\int_1^e(\ln t-x)dt$$

$$=-\left[t\ln t-t-xt\right]_1^e$$

$$=-(e-e-ex)+(0-1-x)$$

$$=(e-1)x-1$$

ដោយ $e-1>0$ អនុគមន៍ $f(x)$ កើនដាច់ខាតចំពោះ $1\le x$ និង $f(1)=e-2$

ពេល $0<x<1$ យើងបាន

$$f'(x)=2e^{x}-e-1$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\ln\frac{e+1}{2}$$

ដូចនេះ យើងបានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម៖

x	0		$\ln\frac{e+1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ដូចនេះ៖ $f\left(\ln\frac{e+1}{2}\right)<f(1)$

ដូចនេះ៖ $f(x)$ មានអប្បបរមាត្រង់ $x=\ln\frac{e+1}{2}$ ហើយ $f\left(\ln\frac{e+1}{2}\right)=e-(e+1)\ln\frac{e+1}{2}$

លំហាត់ទី ៣៤ (ការអនុវត្តលើគណិតវិទ្យា)

ចូរឆ្លើយសំណួរខាងក្រោម៖

1) គណនា $\int_0^2 xe^{-\frac{1}{2}x}dx$

2) រកអនុគមន៍ $f(x)$ ដែល $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{3}{2}\int_0^2\{f(t)-2\}tdt$

ចម្លើយ

1) គណនា $\int_0^2 xe^{-\frac{1}{2}x}dx$

$$\int_0^2 xe^{-\frac{1}{2}x}dx=\left[x\left(-2e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]_0^2-\int_0^2(x)'\left(-2e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$$

$$=\left[-2xe^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^2-\int_0^2(-2e^{-\frac{1}{2}x})dx$$

$$=-\frac{4}{e}-\left[4e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^2=-\frac{4}{e}-\frac{4}{e}+4$$

$$=4-\frac{8}{e}$$

2) រកអនុគមន៍ $f(x)$ ដែល $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{3}{2}\int_0^2\{f(t)-2\}tdt$

យក $A=\int_0^2\{e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{3}{2}A-2\}tdt$ នោះគឺជាចំនួនថេរហើយ

ដូចនេះ៖

$$A=\int_0^2\{e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{3}{2}A-2\}tdt$$

$$=\int_0^2 te^{-\frac{1}{2}x}dt+\left(\frac{3}{2}A-2\right)\int_0^2 tdt$$

$$=4-\frac{8}{e}+\left(\frac{3}{2}A-2\right)\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2$$ (តាមសំណួរទី១)

$$=3A-\frac{8}{e}$$

ដូចនេះ

$$A=\frac{4}{e}$$

ដូចនេះ

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{3}{2}\int_0^2\{f(t)-2\}tdt$$

$$=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{6}{e}$$

លំហាត់ទី ៣៥ (ការអនុវត្តលើគណិតវិទ្យា)

ឧបមាអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ដោយ $f(x)=\cos x+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(x-t)dt$

1) ដោយយក $a=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos tdt$ និង $b=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin tdt$ បង្ហាញថា $f(x)$ ដោយប្រើ $a,b,\cos x$ និង $\sin x$

2) គណនា $\int_0^\pi \cos t\sin tdt,\int_0^\pi \cos^2 tdt,\int_0^\pi \sin^2 tdt$

3) រកអនុគមន៍ $f(x)$

ចម្លើយ

1) $$f(x)=\cos x+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(x-t)dt$$

$$=\cos x+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)(\sin x\cos t-\sin t\cos x)dt$$

$$=\cos x+\frac{\sin x}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos tdt-\frac{\cos x}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin tdt$$

$$=\cos x+a\sin x-b\cos x$$

$$=(1-b)\cos x+a\sin x$$

$$2)\int_0^{\pi}\cos t\sin tdt=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2t}{2}dt=\left[-\frac{\cos 2t}{4}\right]_0^4=0$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2 tdt=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi}\sin^2 dt=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

3) តាមសំណួរទី1និង 2 ដូចនេះយើងបាន

$$a=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos tdt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{(1-b)\cos t+a\sin t\}\cos tdt$$

$$=\frac{1-b}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 tdt+\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\cos t\sin tdt$$

$$=\frac{1-b}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+0$$

$$=\frac{1-b}{2}$$

$$b=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin tdt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{(1-b)\cos t+a\sin t\}\sin tdt$$

$$=\frac{1-b}{\pi}\int_0^{\pi}\cos t\sin tdt+\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 tdt$$

$$=0+\frac{a}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{a}{2}$$

ដូចនេះ

$a=\frac{1-b}{2}$ និង $b=\frac{a}{2}$

នាំឱ្យ

$a=\frac{2}{5}$ និង $b=\frac{1}{5}$

ដូចនេះ

$$f(x)=(1-b)\cos x+a\sin x$$

$$=\frac{4}{5}\cos x+\frac{2}{5}\sin x$$

លំហាត់ទី ៣៦ (ការអនុវត្តលើគណិតវិទ្យា)

ចំពោះអនុគមន៍ដឺក្រេទី២អនុគមន៍ $F(x)$ កំណត់ដោយ $F(x)=\int_0^x f(\sin\theta)d\theta$ ចំពោះគ្រប់ x ។

ឧបមាថា $P(x)$ ជាអនុគមន៍ខួបដែលមានខួបស្មើ 2π ហើយ $F(x)$ យកតម្លៃចុងក្រោយបំផុត $(extremum)$

ស្មើនឹង $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ត្រង់ $x=\frac{\pi}{6}$ ។ អនុគមន៍ $F(x)$ និងតម្លៃអតិបរមានិងអប្បបរមារបស់វា។

ចម្លើយ

យក $f(x)=ax^2+bx+c$ នោះ

$$F(x)=\int_0^x f(\sin\theta)d\theta=\int_0^x\left(a\sin^2\theta+b\sin\theta+c\right)d\theta$$

$$=a\int_0^x\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta+b\int_0^x\sin\theta d\theta+c\int_0^x d\theta$$

$$=a\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin2t}{4}\right]_0^x+b\left[-\cos\theta\right]_0^x+c\left[\theta\right]_0^x$$

$$=\frac{a}{2}x-\frac{a\sin2x}{4}-b\cos x+b+cx$$

$$=-\frac{a\sin2x}{4}-b\cos x+\left(\frac{a}{2}+c\right)x+b$$

ដោយ $F(x)$ ជាអនុគមន៍ខួបដែលមានខួបស្មើ 2π យើងបាន

$$F(0)=F(2\pi)$$

ប៉ុន្តែ

$$F(0)=-\frac{a\sin0}{4}-b\cos0+\left(\frac{a}{2}+c\right)\cdot0+b=-b+b=0$$

$$F(2\pi)=-\frac{a\sin4\pi}{4}-b\cos2\pi+\left(\frac{a}{2}+c\right)\cdot2\pi+b=-b+\left(\frac{a}{2}+c\right)\cdot2\pi+b$$

$$=2\pi\left(\frac{a}{2}+c\right)$$

ដូចនេះ

$$\frac{a}{2}+c=0 \qquad ......(i)$$

ដូចនេះ

$$F(x)=-\frac{a\sin x}{4}-b\cos x+b \qquad .....(ii)$$

ដោយ $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$ យើងបាន

$$-\frac{a}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+b=\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad ....(iii)$$

ម្យ៉ាងទៀតតាម (ii) យើងបាន

$$F'(x)=-\frac{a\cos2x}{2}+b\sin x$$

ដោយ $F'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$ យើងបាន

$$-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}+b\cdot\frac{1}{2}=0 \quad ....(iv)$$

តាមសំណួរទី (iii) និង (iv) យើងបាន

$$a=-\frac{2\left(9+4\sqrt{3}\right)}{11}, b=-\frac{9+4\sqrt{3}}{11}$$

ដូចនេះតាម (ii) យើងបាន

$$F(x)=\frac{9+4\sqrt{3}}{22}\sin 2x+\frac{9+4\sqrt{3}}{11}\cos x-\frac{9-4\sqrt{3}}{11}$$

$$=\frac{9+4\sqrt{3}}{22}\left(\sin 2x+2\cos x-2\right)$$

យក $k=\frac{9+4\sqrt{3}}{22}$ នោះ

$$F'(x)=k\left(2\cos 2x-2\sin x\right)=2k\left(1-2\sin x-1\right)\left(\sin x+1\right)$$

ដោយ $F(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលមានខួបស្មើ 2π ដូចនេះវាគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីកំណត់ភាពកើនចុះនៃ $F(x)$ ចំពោះ $0\le x\le 2\pi$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	+	+	0	−	0	+	0	+	+
$f(x)$		↗		↘		↗		↗	

ដោយ $F(0)=F(2\pi)$ យើងបាន

អតិបរមានៃ $F(x)....F\left(\frac{\pi}{6}\pm 2n\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$ និង

អប្បបរមានៃ $F(x)....F\left(\frac{5\pi}{6}\pm 2n\pi\right)=-\frac{72+43\sqrt{3}}{44}$ ដែល $n=1,2,3,...$ ។

លំហាត់ទី ៣៧ (ការអនុវត្តលើគណិតវិទ្យា)

ដូចនេះឆ្លើយសំណួរខាងក្រោមៈ

1) ពេល $k\ge a>0$ គណនា $S=\int_0^k |a-x|e^{-x}dx$

2) កំណត់តម្លៃ $\lim_{k\to\infty} S$

ចម្លើយ

1) $S=\int_0^k |a-x|e^{-x}dx=\int_0^a (a-x)e^{-x}dx-\int_a^k (a-x)e^{-x}dx$

$$=\int_0^a (a-x)e^{-x}dx+\int_k^a (a-x)e^{-x}dx$$

ប៉ុន្តែ

$$\int (a-x)e^{-x}dx = -(a-x)e^{-x} - \int e^{-x}dx = -(a-x)e^{-x} + e^{-x} + c$$
$$= (x-a+1)e^{-x}dx$$

ដូចនេះ

$$S = \left[(x-a+1)e^{-x}\right]_0^a + \left[(x-a+1)e^{-x}\right]_k^0$$
$$= 2e^{-a} + a - 1 - (k-a+1)e^{-k}$$

2) ដោយ $\lim_{k\to\infty} ke^{-k} = 0$ និង $\lim_{k\to\infty} e^{-k} = 0$ យើងបាន

$$\lim_{k\to\infty} S = 2e^{-a} + a - 1$$

* អាំងតេក្រាលដែលមានទម្រង់ $\int_a^{\infty} f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{b} f(x)dx,$ ឬ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ហៅថា "Improper អាំងតេក្រាល"

ហើយកំណត់ដោយ

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\left(\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx\right)$$

លំហាត់ទី ៣៨ (ការអនុវត្តលើគណិតវិទ្យា)

ស្វីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2 x dx$ ដែល $n = 1, 2, 3, \ldots$ ។ នោះកំណត់ $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n$ ។

ចម្លើយ

+វិធីទី1

$$a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2 x = \int_0^{\frac{1}{n}} x\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} xdx + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{1}{n}} x\cos 2xdx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{1}{n}} - \int_0^{\frac{1}{n}}\frac{1}{2}\sin 2xdx\right)$$

$$= \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4n}\sin\frac{2}{n} - \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4n}\sin\frac{2}{n} + \frac{1}{8}\left(\cos\frac{2}{n} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4n}\sin\frac{2}{n} - \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{n}$$

ដូចនេះ $n^2a_n=\frac{1}{4}+\frac{n}{4}\sin\frac{2}{n}-\frac{n^2}{4}\sin^2\frac{1}{n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}-\frac{1}{4}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}n^2a_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{4}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$

+វិធីទី2

ចំពោះ $n=1,2,3...$ យើងអាចយក $0\le x\le\frac{1}{n}\le\frac{\pi}{2}$

ដោយ $y=\cos x$ ដូចនេះជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត $0\le x\le\frac{1}{n}\le\frac{\pi}{2}$ យើងបាន

$\cos 0\ge\cos x\ge\cos\frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{2}=0$

ដូចនេះ $\cos^2 0\ge\cos^2 x\ge\cos^2\frac{1}{n}$

$x\cdot 1\ge x\cos^2 x\ge x\cos^2\frac{1}{n}$ ចំពោះ $0\le x\le\frac{1}{n}\le\frac{\pi}{2}$

ដោយមានអាំងតេក្រាលចំពោះ $0\le x\le\frac{1}{n}$ យើងបាន

$\int_0^{\frac{1}{n}}xdx\ge\int_0^{\frac{1}{n}}x\cos^2 xdx\ge\int_0^{\frac{1}{n}}x\cos^2\frac{1}{n}dx$

$\int_0^{\frac{1}{n}}xdx\ge a_n\ge\int_0^{\frac{1}{n}}x\cos^2\frac{1}{n}dx$

$\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{n}}\ge a_n\ge\cos^2\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{n}}$

$\frac{1}{2n^2}\ge a_n\ge\frac{1}{2n^2}\cos^2\frac{1}{n}$

ដោយ $\lim_{n\to\infty}\cos^2\frac{1}{n}=1$ យើងបាន

$\lim_{n\to\infty}n^2a_n=\frac{1}{2}$

លំហាត់ ៣៩ (ការអនុវត្តលើគណិតវិទ្យា)

ស្វីត $\{\mathrm{A}_n\}$ កំណត់ដោយ $\mathrm{A}_n=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left|k\tan x-\sin kx\right|dx$ ដែល $k=1,2,3...$ កំណត់ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}\mathrm{A}_k$ ។

ចម្លើយ

យក $f(x)=k\tan x-\sin kx$ ចំពោះ $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$ ។

នោះ $f'(x)=\frac{k}{\cos^2 k}-\cos kx=k\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos kx\right)\ge k\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\ge 0$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើន

ដោយ $f(0)=0$ យើងបាន $f(x)\geq 0$ ចំពោះ $0\leq x\leq \frac{\pi}{4}$

ហើយ $f(-x)=k\tan(-x)-\sin k(-x)=-k\tan x+\sin kx=-f(x)$

ដូចនេះ $\mathrm{A}_n=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|k\tan x-\sin kx|\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(k\tan x-\sin x)\,dx$

$$=2k\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x dx-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin kx dx$$

$$=2k\left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-2\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-2k\ln\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{k}\cos\frac{k\pi}{4}-\frac{2}{k}$$

$$=k\ln 2+\frac{2}{k}\cos\frac{k\pi}{4}-\frac{2}{k}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{k}\mathrm{A}_k=\ln 2+\frac{2}{k^2}\cos\frac{k\pi}{4}-\frac{2}{k^2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\mathrm{A}_k=\ln 2$

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី១

- កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃ.....ទី.....ខែ......ឆ្នាំ.......ព.ស........ត្រូវនឹងថ្ងៃទី....ខែ.......ឆ្នាំ..........
- **មុខវិជ្ជា ៖** គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១១
- **ជំពូក៦៖** ប្រូបាប(ទំព័រទី១៩៧)
- **មេរៀនទី២៖** ប្រូបាប (ទំព័រទី២០៥)
- **ខ្លឹមសារ៖** ២.១ និយមន័យប្រូបាប ២.២ លក្ខណៈនៃប្រូបាប
- **រយៈពេលបង្រៀន៖** ២ម៉ោង (១០០នាទី)
- **បង្រៀនដោយ៖** ....

I. **វត្ថុបំណង៖** ក្រោយបញ្ចប់ខ្លឹមសារមេរៀននេះ សិស្សអាចទទួលបានៈ
- **វិជ្ជាសម្បទា៖** កំណត់និយមន័យប្រូបាប និងលក្ខណៈនៃប្រូបាបបានយ៉ាងច្បាស់លាស់ តាមរយៈការពិសោធន៍ និងឧទាហរណ៍ ដោយពិភាក្សាជាក្រុម ។
- **បំណិនសម្បទា៖** អនុវត្តនិយមន័យប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ ក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហាបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវ ដោយពិភាក្សាជាក្រុម ។
- **ចរិយាសម្បទា៖** មានស្មារតីទទួលខុសត្រូវលើការងារ សហការល្អ ស្រលាញ់ការសិក្សា ស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្រ ។

II. **សម្ភារឧបទេស**
- សៀវភៅសិស្ស (ទំព័រ២០៥ ដល់ ២០៧) របស់ អ.យ.ក បោះពុម្ពឆ្នាំ.........
- សៀវភៅគ្រូ (ទំព័រទី...ដល់.....) របស់ អ.យ.ក បោះពុម្ពឆ្នាំ.........
- រូបភាពតុក្កតា គ្រាប់ឡុកឡាក់ និងសន្លឹកកិច្ចការសម្រាប់ពិសោធន៍

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** តាមយុទ្ធសាស្ត្រតុក្កតាគំនិត (គោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល) ។

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	**ខ្លឹមសារមេរៀន**	**សកម្មភាពសិស្ស**
គ្រូសួរតំណាងសិស្ស	**ជំហានទី១៖** រដ្ឋបាលថ្នាក់(៣នាទី) • ពិនិត្យអវត្តមាន • ពិនិត្យអនាម័យ • ពង្រឹងវិន័យ និងសណ្តាប់ធ្នាប់	សិស្សឡើងរាយការណ៍
១.គ្រូសួរៈ ក)ដូចម្តេចហៅថាលំហគំរូ? (លំហសំណាក) ? ខ)ដូចម្តេចហៅថាព្រឹត្តិការណ៍ចៃដន្យ?	**ជំហានទី២៖** រំឭកមេរៀនចាស់(៧នាទី) ក)លំហគំរូគឺជាសំណុំនៃគ្រប់លទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចកើតមានក្នុងពិសោធន៍ចៃដន្យ ។ ខ)ព្រឹត្តិការណ៍ចៃដន្យ គឺជាសំណុំរងនៃលំហគំរូ ។	១.សិស្សឆ្លើយ

២.គ្រូពិនិត្យកិច្ចការផ្ទះ និងហៅសិស្សម្នាក់ឡើងបង្ហាញរួចសំយោគ ។	**<u>លំហាត់</u>** ៖ គេមានប័ណ្ណលេខ៩សន្លឹក ដែលចុះពីលេខ១រហូតដល់លេខ៩ ។ គេហូតប័ណ្ណ២សន្លឹកបន្តបន្ទាប់គ្នា ។ តើមានប៉ុន្មានរបៀបក្នុងការហូតហើយមិនដាក់ចូលវិញ ? **<u>ចម្លើយ៖</u>** ចំនួនរបៀបសរុបក្នុងការហូតប័ណ្ណនេះ +ដោយគេហូតប័ណ្ណ២សន្លឹកបន្តបន្ទាប់ពីក្នុងចំណោមប័ណ្ណ៩សន្លឹកដោយមិនដាក់ចូលវិញ នេះជាចម្លាស់២ធាតុ យកចេញពីក្នុង៩ធាតុ គេបាន <u>ចំនួនករណីសរុប</u> $N=P(9,2)=\frac{9!}{(9-2)!}=72$ <u>របៀប</u> ដូច្នេះ $N=72$ របៀប ។	២.សិស្សឡើងបង្ហាញ
  ១.គ្រូបែងចែកសិស្សជាក្រុមដែលមានសមាជិកពី៤នាក់ទៅ៥នាក់ ទៅតាមស្ថានភាពជាក់ស្តែង។ ២.គ្រូសួរសំណួរបំផុស - តើគ្រាប់ឡុកឡាក់១មានមុខប៉ុន្មាន ? - បើគេបោះគ្រាប់ ឡុកឡាក់នេះ តើគេសង្ឃឹមប៉ុន្មានភាគរយដែលគ្រាប់ ឡុកឡាក់នឹងចេញលេខ៣ ? ៣.គ្រូបង្ហាញរូបតុក្កតា និងឱ្យសិស្សតាមក្រុមពិភាក្សាដើម្បីជ្រើសរើសចម្លើយ ដែលមានក្នុងរូបតុក្កតា។ ៤.គ្រូឱ្យសិស្សបង្ហាញចម្លើយ និងអំណះអំណាង	**ជំហានទី៣៖** ខ្លឹមសារមេរៀនថ្មី(៧០នាទី) **២.ប្រូបាប** **២.១ និយមន័យប្រូបាប** ឧទាហរណ៍: បើគេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ចំនួនមួយដង តើគេសង្ឃឹមប៉ុន្មានភាគរយដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខ៣ ?	 ១.សិស្សចូលតាមក្រុម ២.សិស្សឆ្លើយ - គ្រាប់ឡុកឡាក់១ មានមុខ៦គឺ 1,2,3,4,5 និង6 ។ - ភាគរយដែលសង្ឃឹមបោះឡុកឡាក់បានលេខ៣គឺ

៥.គ្រូចែកគ្រាប់ឡុកឡាក់ និងសន្លឹករបាយការណ៍ដើម្បីឱ្យសិស្សតាមក្រុមធ្វើពិសោធន៍ដើម្បីគាំទ្រអំណះអំណាង ។

៦.គ្រូឱ្យសិស្សឡើងបង្ហាញលទ្ធផលពិសោធន៍

៧.គ្រូធ្វើការសន្និដ្ឋាន

ក្នុងការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់មួយដងគេសង្ឃឹមលទ្ធផលដែលចេញលេខ៣មាន

$\frac{1}{6}=0.1666=16.66\%$

<u>សំណួរ</u> ហេតុអ្វីបានជាយើងសង្ឃឹមថាលទ្ធផល នៃការបោះឡុកឡាក់ចេញលេខ៣មាន 16.66% ?

ដំណើរការពិសោធន៍

តារាងលទ្ធផលពិសោធន៍

n	10	30	50	60	90	100	200	500
r	2	4	6	11	16	16	33	83
$\frac{r}{n}$	0.20	0.133	0.160	0.183	0.177	0.160	0.165	0.166

សន្និដ្ឋាន: បើចំនួនដងនៃការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់កាន់តែច្រើន នោះប្រេកង់ធៀបខិតទៅរកចំនួនថេរមួយគឺ $\frac{1}{6}$ ។

ចំនួន $\frac{1}{6}\approx 16.66\%$ ហៅថាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខ៣ ។

គេពិនិត្យឃើញថា: 6ជាចំនួនលទ្ធផលទាំងអស់ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ អាចចេញព្រោះវាមានមុខ6 ដែលសុទ្ធតែមានឱកាសចេញដូចៗគ្នា។ ហើយលទ្ធផលដែលអាចចេញលេខ៣មានតែមួយករណីគត់។

ដូច្នេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខ៣គឺ $\frac{1}{6}$ ។

ដូចគ្នាដែរ ចំពោះករណីនៃការចេញលេខផ្សេងៗគឺ

$P(1)=P(2)=...=P(6)=\frac{1}{6}$

តាមពិសោធន៍នេះ ចំពោះលំហសំណាក S យើងអាចកំណត់ប្រូបាបនៃព្ត៌ត្តិការណ៍ A ដោយ

$P(\text{A})=\frac{n(\text{A})}{n(S)}$ ដែល

៣.សិស្សពិភាក្សា និងជ្រើសរើសចម្លើយដែលមានក្នុងរូបត្តក។

៤.សិស្សឡើងបង្ហាញដោយភ្ជាប់អំណះអំណាងរបស់ក្រុម។

៥.សិស្សចាប់ផ្តើមពិសោធន៍ដោយ បោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ និងកត់ត្រាពីលទ្ធផល

៦.សិស្សឡើងបង្ហាញ

៧.សិស្សសួរ ស្តាប់

	• $n(A)$ ជាចំនួនករណីស្រប • $n(S)$ ជាករណីអាច ឧទាហរណ៍៖ គូស្វាមីភរិយាមួយគូ ចង់បានកូន២នាក់។ គណនាប្រូបាបដែល គាត់បានកូនស្រីមួយប្រុសមួយ។ ចម្លើយ ៖ គណនាប្រូបាបដែលគាត់បានកូនស្រីមួយប្រុសមួយ តាង F ជាលំហសំណាក នោះ $S=\{MM,MF,FM,FF\}$ A ជាព្រឹត្តិការណ៍បានកូនស្រីទាំង2 នោះ $A=\{MF,FM\}$ គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{2}$ ដូច្នេះ $P(A)=\frac{1}{2}$ ។ ២.២ លក្ខណៈប្រូបាប -ប្រូបាបនៃលំហសំណាក S គឺ $P(S)=1$ -ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចកើតឡើងគឺ $P(\varnothing)=0$ -ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយក្នុងលំហសំណាក ដោយ $0\le P(A)\le 1$ ។	
១.គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិឱ្យសិស្សធ្វើ រួចហៅម្នាក់ឡើងបង្ហាញ ២.គ្រូធ្វើសំយោគ	**ជំហានទី៤៖** ពង្រឹងពុទ្ធិ(៧នាទី) លំហាត់៖ គេបោះកាក់មួយដែលមានមុខ Tនិង H ចំនួន២ដង។ ចូររកប្រូបាប ក. បោះបានមុខដូចគ្នា ខ. បោះបានមុខTមួយយ៉ាងតិច ។ ចម្លើយ៖ ក. បោះបានមុខដូចគ្នា តាងAជាព្រឹត្តិការណ៍បោះកាក់បានមុខដូចគ្នា យើងមាន $n(S)=2^2=4$ $n(A)=2$ ព្រោះព្រឹត្តិការណ៍Aមាន $\{HH,TT\}$ នាំឱ្យ $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ដូច្នេះ $P(A)=\frac{1}{2}$	១.ធ្វើលំហាត់ ២.ស្តាប់ កត់ត្រា

	ខ. បោះបានមុខTមួយយ៉ាងតិច តាងBជាព្រឹត្តិការណ៍បោះកាក់បានមុខT មួយយ៉ាងតិច នោះ $n(B)=3$ ព្រោះ $B=\{HT,TH,TT\}$ នាំឱ្យ $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{4}$ ដូច្នេះ $P(B)=\frac{3}{4}$ ។	
១.គ្រូដាក់លំហាត់កិច្ចការផ្ទះ ២.អនុញ្ញាតឱ្យសិស្សចេញ	**ជំហានទី៥៖** បណ្តាំផ្ញើ(៣នាទី) លំហាត់៖ នៅក្នុងថង់មួយមានប៊ូលពណ៌ក្រហម 5 គ្រាប់ចុះលេខពី 1,2,3,4,5និងប៊ូលបៃតង 5គ្រាប់ចុះលេខពី 1,2,3,4,5។គេចាប់យកប៊ូល2គ្រាប់ព្រមគ្នាចេញពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖ ក. A : យកបានប៊ូលចុះលេខខុសគ្នា ខ. B : យកបានប៊ូលពណ៌ដូចគ្នា គ. C : យកបានប៊ូលចុះលេខជាចំនួនគូមួយ និងចំនួនសេសមួយ ។	កត់ត្រា និងជំរាបលាគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី២

- កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃ.....ទី.....ខែ......ឆ្នាំ២០២...ត្រូវនឹងថ្ងៃ....
- មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១១
- ជំពូក១៖ ស្វីតនៃចំនួនពិត
- មេរៀនទី៣៖ ស្វីតធរណីមាត្រ
- ខ្លឹមសារ៖ ១ និយមន័យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ២ តួទី n (តួទូទៅ)នៃស្វីតធរណីមាត្រ
- រយៈពេល២ម៉ោង (ដំណើរការបង្រៀន ១០០នាទី)
- បង្រៀនដោយ៖

I. **វត្ថុបំណង៖** ក្រោយបញ្ចប់ខ្លឹមសារមេរៀននេះ សិស្សអាចទទួលបាន៖

- **វិជ្ជាសម្បទា៖** ប្រាប់បានពីនិយមន័យ និងកំណត់តួទី n នៃស្វីតធរណីមាត្របានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍ និងសំណួរបំផុសរបស់គ្រូ ដោយពិភាក្សាជាក្រុម ។
- **បំណិនសម្បទា៖** អនុវត្តនិយមន័យ និងកំណត់តួទី n នៃស្វីតធរណីមាត្រក្នុងការពង្រឹងខ្លឹមសារមេរៀននេះ និងបញ្ហាក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃបានត្រឹមត្រូវ ។
- **ចរិយាសម្បទា៖** សិស្សផ្លាស់ប្តូរការសិក្សាពីការចងចាំមកជា ការពិភាក្សា ការដោះស្រាយ និងពន្យល់បានត្រឹមត្រូវ ។

V. **សម្ភារឧបទេស**

- សៀវភៅសិស្ស (ទំព័រ១៦ដល់១៨)
- សៀវភៅគ្រូ (ទំព័រទី...ដល់.....)
- ហ្វឺត បន្ទាត់ ប័ណ្ណសំណួរចំនួន៤

VI. វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖ គោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល(តាមយុទ្ធសាស្ត្រតុក្កតាគមនិត) ។

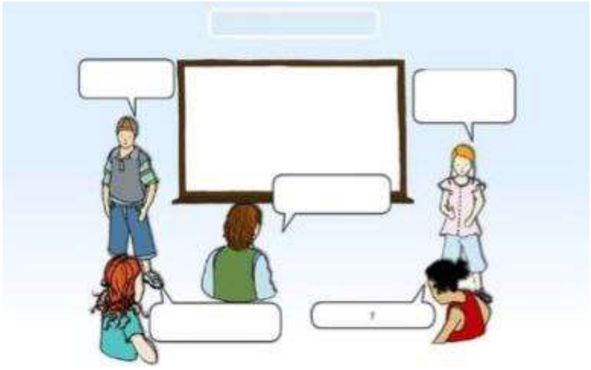
VII. ដំណើរការបង្រៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	ជំហានទី១៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់(៣នាទី) • ពិនិត្យអវត្តមាន • ពិនិត្យអនាម័យ ពង្រឹងវិន័យ និងសណ្តាប់ធ្នាប់	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
១. ចូរឱ្យនិយមន័យស្វីតនព្វន្ត? ២. ចូរឱ្យរូបមន្តតួទូទៅនៃស្វីតនព្វន្ត?	ជំហានទី២ (រំឭកមេរៀន៧នាទី) ១. និយមន័យស្វីតនព្វន្ត ២. តួទៅនៃស្វីតនព្វន្ត	១. ស្វីតនព្វន្តជាស្វីតនៃចំនួនពិត ដែលតួនីមួយៗ(ក្រៅពីតួទី១) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់ បូកចំនួនថេរ d មួយ។ ២. តួទូទៅនៃស្វីតនព្វន្តកំណត់ដោយ $a_n = a_1 + (n-1)d$

-បែងចែកសិស្សជាក្រុម សមាជិក៥នាក់ ដើម្បីសង្កេតលើសកម្មភាពសិក្សាទៅ តាមប្រភេទស្វីតនីមួយៗ ជួយក្រុមនីមួយៗពិភាក្សាលើសកម្មភាពសិក្សា ស្តាប់សិស្សពន្យល់ចម្លើយតាមក្រុម និងឱ្យសិស្សបង្ហាញអំពីមូលហេតុដែលចាំបាច់។ គ្រូពន្យល់បន្ថែម និងកែលម្អចំណុចដែលខ្វះខាត ។ប្រៀបធៀបចម្លើយតាមក្រុមៈ ស្វីតទាំងអស់មានតួទូទៅ កំណត់ដោយ $a_n = r^{n-1}a_1$ -ឱ្យសិស្សទាញនិយមន័យ -សម្រួលចម្លើយសិស្ស -តាមលំនាំគំរូលំហាត់ក្រុមនីមួយៗឱ្យសិស្សទាញរកតួទី n	**ជំហានទី៣ៈ (៣០នាទី)** មេរៀនទី៣ ស្វីតធរណីមាត្រ ១.និយមន័យស្វីតធរណីមាត្រ សកម្មភាពសិក្សាៈ +ក្រុមទី១ ពិនិត្យលើស្វីត $\{a_n\}: -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -4, \ldots$ ក.កំណត់រកតួទី១ ទី២ ទី៣រហូតដល់ទួទី ២០ ខ.ទាញទំនាក់ទំនងរវាងតួទី១និងតួទី២ តួទី២និងតួទី៣... គ.រកទំនាក់ទំនងរវាង តួទី២និងតួទី១ តួទី៣និងតួទី១ .... តួទីnនិងតួទី១ និយមន័យ ស្វីតធរណីមាត្រជាស្វីតចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ(ក្រៅពីតួទី១)ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ q , $(q^1 \quad 0)$ មួយ។ ២. តួទីnនៃស្វីតធរណីមាត្រ	• ក្រុមទី២ ពិនិត្យលើស្វីត $\{b_n\}: \frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}, \frac{27}{4}, \ldots$ • ក្រុមទី៣ ពិនិត្យលើស្វីត $\{c_n\}: -50, -10, -2, -\frac{2}{5}, \ldots$ • ក្រុមទី៤ ពិនិត្យលើស្វីត $\{d_n\}: 14, 2, \frac{2}{7}, \frac{2}{49}, \ldots$ ចម្លើយ ក. $a_1 = -\frac{1}{4}, a_2 = -\frac{1}{2}$ $a_3 = -1, \ldots, a_{10} = -\frac{1}{4} \times 2^9$ ខ. $a_2 = ra_1, a_3 = ra_2$ $a_4 = ra_3, \ldots, a_{10} = ra_9$ គ. $a_n = r^{n-1}a_1$ -តំណាងក្រុមនីមួយៗពន្យល់ពីការរកឃើញរបស់ពួកគេទៅកាន់គ្រូនិង កែលម្អចម្លើយរបស់ពួកគេ។ និយមន័យ ស្វីតធរណីមាត្រជាស្វីតចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ(ក្រៅពីតួទី១) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនqថេរមួយ។

-គ្រូបញ្ជាក់បន្ថែមពីនិយមន័យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែល a_1 ជាតួទី១និងផលធៀបរួមr នោះតួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $a_n = a_1 \times q^{n-1}$	ជាទូទៅ៖ បើ (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទីមួយ a_1 និងqជាផលធៀបរួម នោះតួទី nកំណត់ដោយ $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ ព្រោះ $a_1 = a_1$ $a_2 = a_1 \times q^1$ $a_3 = a_2 \times q^2$ .... $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ សម្គាល់: បើ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល a_p ជាតួទី p និងផលធៀបរួម q នោះតួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $a_n = a_p \times q^{n-p}$	-សិស្សកែលម្អបញ្ញត្តិលើ និយមន័យ ចម្លើយ ដោយហេតុថា $a_1 = a_1$ $a_2 = a_1 \times q^1$ $a_3 = a_2 \times q^2$ .... $a_n = a_1 \times q^{n-1}$
ការវាយតម្លៃ -ការងារបុគ្គល រួចហៅសិស្សម្នាក់រាយការណ៍	**ជំហានទី៤** (ពង្រឹងពុទ្ធិ៧នាទី) សកម្មភាពទី២៖ ដោះស្រាយលំហាត់តាមក្រុមនូវលំហាត់ខាងក្រោមៈ លំហាត់៖ គេមាន $\{a_n\}$:2, 4, 8, 16, 32,... ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។តើតម្លៃ1024 ជាតួទីប៉ុន្មានស្វ៊ីត $\{a_n\}$ នេះ ?	សមាជិកក្រុមនីមួយៗឡើងដោះស្រាយប្រលងប្រណាំង ចម្លើយ $\{a_n\}: 1024 = 2^{10} = 2 \times 2^{10-1}$ ជាតួទី 10
-ដាក់លំហាត់ ទី3 ទី4 ទំព័រ25 ឱ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះ និងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យ និងច្បាប់ចរាចរណ៍	**ជំហានទី៥** (កិច្ចការផ្ទះ៣នាទី) -លំហាត់ទី៣ ទី៤ ទំព័រ25	-គូសចំណាំលំហាត់ និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

សន្លឹកកិច្ចការក្រុម



+ក្រុមទី១ ពិនិត្យលើស្វ៊ីត

$\{a_n\}: -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -4, \ldots$

ក.កំណត់រកតួទី១ ទី២ ទី៣រហូតដល់ទូទី២០

ខ.ទាញទំនាក់ទំនងរវាងតួទី១និងតួទី២ តួទី២និងតួទី៣...

គ.រកទំនាក់ទំនងរវាង

តួទី២និងតួទី១

តួទី៣និងតួទី១

....

តួទីnនិងតួទី១

- ក្រុមទី២ ពិនិត្យលើស្វ៊ីត

$\{b_n\}: \frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}, \frac{27}{4}, \ldots$

ក.កំណត់រកតួទី១ ទី២ ទី៣រហូតដល់ទូទី២០

ខ.ទាញទំនាក់ទំនងរវាងតួទី១និងតួទី២ តួទី២និងតួទី៣...

គ.រកទំនាក់ទំនងរវាង

តួទី២និងតួទី១

តួទី៣និងតួទី១

....

តួទីnនិងតួទី១

- ក្រុមទី៣ ពិនិត្យលើស្វ៊ីត

$\{c_n\}: -50, -10, -2, -\frac{2}{5}, \ldots$

ក.កំណត់រកតួទី១ ទី២ ទី៣រហូតដល់ទូទី២០

ខ.ទាញទំនាក់ទំនងរវាងតួទី១និងតួទី២ តួទី២និងតួទី៣...

គ.រកទំនាក់ទំនងរវាង

តួទី២និងតួទី១

តួទី៣និងតួទី១

....

តួទីnនិងតួទី១

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី៣

- កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃ.....ទី.....ខែ......ឆ្នាំ២០២...ត្រូវនឹងថ្ងៃ....
- មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១១
- រយៈពេល២ម៉ោង (ដំណើរការបង្រៀន ១០០នាទី)
- បង្រៀនដោយ....
- ចំណងជើងមេរៀន៖

ជំពូក១៖ លីមីត

មេរៀនទី១៖ លីមីតនៃអនុគមន៍

៥. លីមីតនៃអនុគមន៍មិនពិជគណិត

៥.២ លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

I. **វត្ថុបំណង៖** ក្រោយបញ្ចប់ខ្លឹមសារមេរៀននេះ សិស្សអាចទទួលបាន៖

- វិជ្ជាសម្បទា៖ កំណត់របៀបដោះស្រាយលីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដោយប្តូរអថេរបានត្រឹមត្រូវ តាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។
- បំណិនសម្បទា៖ ដោះស្រាយលីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដោយប្តូរអថេរបានត្រឹមត្រូវ តាមរយៈការពិភាក្សាក្រុម។
- ចរិយាសម្បទា៖ បណ្តុះទម្លាប់សិស្សពិភាក្សាជាក្រុម តាមរយៈការសម្រួលរបស់គ្រូ។

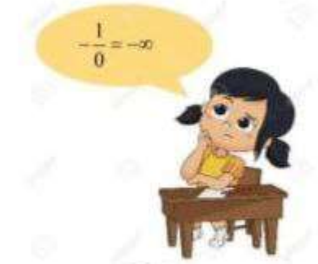
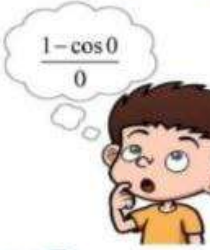
II. **សម្ភារឧបទេស**

- សៀវភៅគោល រូបភាព ហ្វីត បន្ទាត់

III. វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖ គោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល(តាមយុទ្ធសាស្ត្រតុក្កតាគំនិត)។

IV. ដំណើរការបង្រៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់	**ជំហានទី១** រដ្ឋបាលថ្នាក់(៣នាទី) • ពិនិត្យអវត្តមាន • ពិនិត្យអនាម័យ ពង្រឹងវិន័យ និងសណ្តាប់ធ្នាប់	-រាយការណ៍
	ជំហានទី២ រំឭកមេរៀន(៥នាទី) ចម្លើយ ១. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ២. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$	ចម្លើយ ១. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ២. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$
-ដាក់លំហាត់បង្ហាញរូប -ឱ្យសិស្សម្នាក់ៗ ជ្រើសយកចម្លើយគិតថា	**ជំហានទី៣** មេរៀនថ្មី (២៥នាទី) មេរៀនទី១ លីមីតនៃអនុគមន៍ (ត) ៥. លីមីតនៃអនុគមន៍មិនពិជគណិត	-ពិនិត្យមើលលំហាត់និងចម្លើយ -ជ្រើសរើសចម្លើយ

ត្រឹមត្រូវ	៥.២ លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ លំហាត់ គណនាលំហាត់ខាងក្រោម $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1}{\frac{\pi}{2}-x}$	
-ចែកសិស្ស៤ក្រុម ពិភាក្សារកចម្លើយ -ឱ្យសិស្សបង្ហាញចម្លើយ និងអំណះអំណាង -តើប្អូនអាចដោះស្រាយលំហាត់ នេះបានទេបើលីមីតមិនខិតជិត សូន្យ? -ពន្យល់សិស្ស ដូចនេះដើម្បីដោះស្រាយលីមីត ត្រូវប្តូរអថេរឱ្យលីមីតនេះខិតជិត សូន្យវិញ	  	-ពិភាក្សាគ្នាជ្រើសចម្លើយ -បង្ហាញចម្លើយ និងអំណះអំណាង -ឆ្លើយ -ពិភាក្សាគ្នា $\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{-t}$ $=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}$
-ឱ្យសិស្សដោះស្រាយក្នុងក្រុម គណនា $\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{-t}$	ចម្លើយដោះស្រាយមិនបាន តាង $t=x-\frac{\pi}{2}\Rightarrow -t=\frac{\pi}{2}-x$ បើ $x\to\frac{\pi}{2},\ t\to 0$ $\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1}{\frac{\pi}{2}-x}$ $=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{-t}$	$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}$ $=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t}$ $=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\times\frac{1}{2}$ $=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{2}\right)=0$

	ចម្លើយ $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}$ $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t}$ $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\times\frac{1}{2}$ $=\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{t}{2}\right)=0$	
-ដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សគណនា	**ជំហានទី៤ ពង្រឹងពុទ្ធិ**(១២នាទី) លំហាត់ គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ក. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{(x-\pi)^2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin\frac{x}{2}-1}{2-x}$ ចម្លើយ ក. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{(x-\pi)^2}$ តាង $t=x-\pi\Rightarrow t=x+\pi$ បើ $x\to\pi$ នោះ $t\to 0$ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{(x-\pi)^2}$ $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos(t+\pi)}{x-\pi}$ $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t\cos\pi-\sin t\sin\pi+1}{t^2}$ $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}$ $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}$ $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\times\frac{1}{2}$ $=\frac{1}{2}$	គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ក. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{(x-\pi)^2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin\frac{x}{2}-1}{2-x}$ ចម្លើយ ក. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{(x-\pi)^2}$ តាង $t=x-\pi\Rightarrow t=x+\pi$ បើ $x\to\pi$ នោះ $t\to 0$ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{(x-\pi)^2}$ $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos(t+\pi)}{x-\pi}$ $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t\cos\pi-\sin t\sin\pi+1}{t^2}$ $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}$ $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}$ $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\times\frac{1}{2}$ $=\frac{1}{2}$

-ដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សធ្វើ	ខ. $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\frac{x}{2}-1}{2-x}$ តាង $t=\pi-x\Rightarrow x=t+\pi$ បើ $x\to\pi$ នោះ $t\to 0$ $\Rightarrow\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\frac{x}{2}-1}{\pi-x}$ $=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-1}{-t}$ $=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{t}{2}\sin\frac{\pi}{2}-1}{t}$ $=-\lim_{t\to 0}\frac{-\left(1-\cos\frac{t}{2}\right)}{t}$ $=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{4}}{t}$ $=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\frac{t}{4}}{\left(\frac{t}{4}\right)^2}\times\frac{t}{32}=0$ **ជំហានទី៥ កិច្ចការផ្ទះ** (៥នាទី) កិច្ចការផ្ទះ: គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x-\sqrt{2}}$	ខ. $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\frac{x}{2}-1}{2-x}$ តាង $t=\pi-x\Rightarrow x=t+\pi$ បើ $x\to\pi$ នោះ $t\to 0$ $\Rightarrow\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\frac{x}{2}-1}{\pi-x}$ $=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-1}{-t}$ $=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{t}{2}\sin\frac{\pi}{2}-1}{t}$ $=-\lim_{t\to 0}\frac{-\left(1-\cos\frac{t}{2}\right)}{t}$ $=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{4}}{t}$ $=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\frac{t}{4}}{\left(\frac{t}{4}\right)^2}\times\frac{t}{32}=0$ -កត់ត្រាលំហាត់

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី៤

- កាលបរិច្ឆេទ ៖ ថ្ងៃ.....ទី.....ខែ......ឆ្នាំ២០២...ត្រូវនឹងថ្ងៃ....
- មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១១
- រយៈពេល២ម៉ោង (ដំណើរការបង្រៀន ៥០នាទី)
- ជំពូក៨៖ ចម្លាស់និង បន្សំ
- មេរៀនទី២៖ បន្សំ
- ខ្លឹមសារមេរៀន

  ២.១ បន្សំ

  គ. ចម្លាស់បែងចែកបាន (លំហាត់អនុវត្តន៍)

I. **វត្ថុបំណង៖** ក្រោយបញ្ចប់ខ្លឹមសារមេរៀននេះ សិស្សអាចទទួលបាន៖

   - វិជ្ជាសម្បទា៖ ពន្យល់ពីរបៀបដោះស្រាយលំហាត់ដោយប្រើរូបមន្តចម្លាស់បែងចែកបាន ច្បាស់លាស់តាមរយៈសំណួររំឭកមេរៀនរបស់គ្រូ ។
   - បំណិនសម្បទា៖ ប្រើប្រាស់រូបមន្តចម្លាស់បែងចែកបានក្នុងការគណនាលំហាត់បាន ច្បាស់លាស់តាមរយៈការងារក្រុម។
   - ចរិយាសម្បទា៖ បណ្តុះទម្លាប់សិស្សពិភាក្សាជាក្រុម តាមរយៈការសម្រួលរបស់គ្រូ។

II. **សម្ភារឧបទេស**

   - សៀវភៅគោល រូបភាព ហ្វឺត បន្ទាត់

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** គោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល(តាមយុទ្ធសាស្ត្រតុក្កតាគំនិត) ។

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យវត្តមាន	ជំហានទី១ រដ្ឋបាលថ្នាក់	-រាយការណ៍
-តើចម្លាស់បែងចែកបាន មានរាងដូចម្តេច? -តើគេប្រើរូបមន្តនេះសម្រាប់ដោះស្រាយលំហាត់អ្វី?	ជំហានទី២ រំឭកមេរៀន សំណួរភ្ជាប់មេរៀន	-ឆ្លើយ $\bar{P}(n,n)=\frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}$ $(r_1+r_2+\ldots+r_k=n)$
-បែងចែកសិស្ស៦ក្រុម ចម្រុះភេទ -ដាក់ឧទាហរណ៍ និងប្រាប់ពីវិធីដោះស្រាយ	ជំហានទី៣ មេរៀនថ្មី (៣០នាទី) មេរៀនទី៨ ចម្លាស់ និងបន្សំ មេរៀនទី២៖ បន្សំ ២.១ បន្សំ គ. ចម្លាស់បែងចែកបាន	-ចែកក្រុម -ពិភាក្សាតាមក្រុម

-គ្រូប្រើសំណួរបំផុស • សិស្ស១ឬ២នាក់សាកឆ្លើយ -បង្ហាញតុក្កតាគំនិត -ចូរជ្រើសរើសចម្លើយនិងបង្ហាញពីហេតុផល -ឱ្យសិស្សបង្ហាញចម្លើយតាមក្រុម	ឧទាហរណ៍: តើគេមានប៉ុន្មានរបៀបក្នុងការឡើងកាំជណ្តើរមួយដែលមាន៦កាំ? បើគេដឹងថាអាចឡើងបាន ១ ឬ ២កាំតែប៉ុណ្ណោះក្នុងការឡើងម្តងៗ។ +របៀប១	-សិស្សម្នាក់ឆ្លើយថា ឡើងម្តង១កាំមានន័យថា[1,1,1,1,1,1] ១របៀប -សិស្សម្នាក់ទៀតឆ្លើយ ឡើង១កាំៗចំនួន៤ជំហាន និងជំហានចុងក្រោយចំនួន២កាំ[1,1,1,1,1,2] ១របៀប -ពិភាក្សាជ្រើសចម្លើយត្រូវ -បង្ហាញចម្លើយតាមក្រុម ចម្លើយតាមក្រុមនីមួយៗ +រកចំនួនរបៀបឡើងកាំជណ្តើរ របៀបការឡើងមានដូចជា $\begin{Bmatrix} (1,1,1,1,1,1)(1,1,1,1,,2)(1,1,1,2,1) \\ (1,1,2,1,1) \\ (1,2,1,1,1)(1,1,2,2)(1,2,1,2) \\ (2,1,1,1,1)(2,1,1,2) \\ (2,1,2,1)(2,2,1,1)(2,2,2) \end{Bmatrix}$ មានចំនួន១៣របៀប ។ -ចំនួនរបៀបនៃការឡើងជណ្តើរ ២កាំតែម្តងតែម្តងគត់ $(1,1,1,1,2)$ គឺស្មើ $\frac{5!}{4!}=5$ករណី -ចំនួនរបៀបនៃការឡើង ២កាំ២ដងគត់$(2,1,1,2)$ ស្មើ $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$ករណី -ចំនួនរបៀបឡើងកាំជណ្តើរ ២កាំម្តង ១កាំម្តងគឺ $(1,1,1,1,1,1)(2,2,2)$ស្មើ 2ករណី ដូចនេះចំនួនករណីមានចំនួន $5+6+2=13$របៀប ។ -កត់ត្រា

	$\left\{\begin{array}{l}(1,1,1,1,1,1)(1,1,1,1,,2)(1,1,1,2,1)\\(1,1,2,1,1)\\(1,2,1,1,1)(1,1,2,2)(1,2,1,2)\\(2,1,1,1,1)(2,1,1,2)\\(2,1,2,1)(2,2,1,1)(2,2,2)\end{array}\right\}$ មាន១៣របៀប ។ +របៀបទី២ ២កាំតែម្តងតែម្តងគត់ $(1,1,1,1,2)$ គឺស្មើ $\frac{5!}{4!}=5$ករណី -ចំនួនរបៀបនៃការឡើង ២កាំ២ដង គត់$(2,1,1,2)$ ស្មើ $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$ករណី -ចំនួនរបៀបឡើងកាំជណ្តើរ ២កាំម្តង ១កាំម្តងគឺ $(1,1,1,1,1,1)(2,2,2)$ស្មើ 2ករណី ដូចនេះចំនួនករណីមានចំនួន $5+6+2=13$របៀប ។	
-ដាក់លំហាត់	ជំហានទី៤ ពង្រឹងពុទ្ធិ(៨នាទី) អនុវត្តៈ តើគេអាចចម្លាស់អក្សរនៃ ពាក្យ MATHEMATIC មានប៉ុន្មាន របៀប? ចម្លើយ ចំនួនរបៀបគឺ $\frac{10!}{2!\times 2!\times 2!}=\frac{10!}{8}=453600$	-ដោះស្រាយលំហាត់
-ដាក់កិច្ចការផ្ទះ	ជំហានទី៥ បណ្តាំផ្ញើ លំហាត់ទំព័រ ៨០	-ស្តាប់

ឯកសារយោង

1. សម្តេច ជួន ណាត វចនានុក្រមខ្មែរ ភាគ១ ភាគ២ បោះពុម្ពលើកទី៥ ការផ្សាយរបស់ពុទ្ធសាសនបណ្ឌិត្យភ្នំពេញ ឆ្នាំ១៩៦៧។
2. សៀវភៅវិធីសាស្ត្របង្រៀនគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ឆ្នាំ២០១៩
3. STEPSAM: Secondary School Teacher Training Project in Science and Mathematics Problem-Solving Strategies, Mr. Koji TAKAHASHI Expert of JICA Project, 2003.
4. សៀវភៅសិក្សាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី៩ និងទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន និងកម្រិតខ្ពស់ ។
5. សៀវភៅគណិតវិទ្យា១២ភាគ បោះពុម្ពដោយគម្រោង STEPSAM I, ឆ្នាំ២០០៣។