ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ការអនុវត្តវិធីសាស្ត្របង្រៀនតាម ទ្រឹស្តីអប់រំបែបស្ថាបនានិយម

(5 Es & PBL)

លើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា

ប្រើប្រាស់ថវិកាគម្រោងអភិវឌ្ឍន៍វិស័យអប់រំ
មធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (USESDP)

ឆ្នាំ២០២០

មុខកថា

ទស្សនវិស័យអប់រំនាសតវត្សរ៍ទី២១ បាននាំមកនូវវឌ្ឍនភាពទាំងផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ និងបច្ចេកវិទ្យាឌីជីថល ដែលជាមូលដ្ឋានគ្រឹះក្នុងការអភិវឌ្ឍសង្គម និងសេដ្ឋកិច្ច។ ឆ្លើយតបទៅនឹងទស្សនៈខាងលើនេះ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានយកចិត្តទុកដាក់លើការបណ្តុះបណ្តាល និងការអភិវឌ្ឍធនធានមនុស្សប្រកបដោយចីរភាព ដោយដាក់ចេញនូវគោលដៅជាអាទិភាព សម្រាប់ការធ្វើកំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ ឈរលើសសរស្តម្ភចំនួន៥ រួមមាន៖ (១)ការអនុវត្តគោលនយោបាយគ្រូបង្រៀន (២)ការវាយតម្លៃ (៣)ការងារអធិការកិច្ច (៤)កម្មវិធីសិក្សា និងបរិស្ថានសិក្សា និង (៥)ឧត្តមសិក្សា។ ការធ្វើកំណែទម្រង់គ្រូបង្រៀន និងកម្មវិធីសិក្សា គឺដើម្បីធានាឱ្យកម្ពុជាមានការអប់រំប្រកបដោយគុណភាព មានធនធានមនុស្សប្រកបដោយសមត្ថភាពវិជ្ជាជីវៈ និងដើម្បីឆ្លើយតបទៅនឹងតម្រូវការទីផ្សារពលកម្ម។

ទ្រឹស្តីនៃការរៀននិងបង្រៀន វិធីសាស្ត្របង្រៀន វិធីបង្រៀន និងយុទ្ធវិធីបង្រៀនល្អៗ សម្រាប់លើកកម្ពស់ឧត្តមភាពគ្រូបង្រៀន និងគុណភាពនៃការសិក្សា ត្រូវបានរៀបចំឡើងទៅតាមទស្សនៈ និងចក្ខុវិស័យថ្មីៗ ដោយបានធ្វើការសំយោគចំណេះដឹងពីទ្រឹស្តីអប់រំបែបស្ថាបនានិយម កម្រិតគិតរបស់ប្លូមតាក់សូណូមី និងវិធីសាស្ត្របង្រៀនបច្ចុប្បន្នរបស់ប្រទេសមួយចំនួនក្នុងតំបន់ និងសាកលលោក ដើម្បីឱ្យសិស្សានុសិស្សទទួលបានវិជ្ជាសម្បទា បំណិនសម្បទា ចរិយាសម្បទា និងកាយសម្បទា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា សង្ឃឹមថាគ្រប់ស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ នឹងចូលរួមគាំទ្រអនុវត្តវិធីសាស្ត្របង្រៀនទាំងអស់នេះ ដើម្បីពង្រឹងសក្តានុពលរបស់គ្រូបង្រៀនគ្រប់កម្រិតសិក្សា និងអភិវឌ្ឍជំនាញវិជ្ជាជីវៈគ្រូបង្រៀនឱ្យកាន់តែបានល្អប្រសើរឡើង។

ក្រសួង សូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅ និងកោតសរសើរចំពោះគណៈកម្មការអភិវឌ្ឍវិធីសាស្ត្របង្រៀន គ្រូឧទ្ទេស និងលោកគ្រូ-អ្នកគ្រូ ដែលបានខិតខំប្រឹងប្រែងយកអស់កម្លាំងកាយចិត្ត និងប្រាជ្ញា ធ្វើឱ្យស្នាដៃដ៏មានសារៈសំខាន់នេះសម្រេចបាន ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់សង្គមជាតិយើង។

ថ្ងៃ [illegible] ខែ [illegible] ឆ្នាំជូត ទោស័ក ព.ស. ២៥៦៤

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី ១៤ ខែ ៧ ឆ្នាំ២០២០

រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

បណ្ឌិតសភាចារ្យ **ហង់ជួន ណារ៉ុន**

អារម្ភកថា

ការបង្រៀន និងរៀនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព ស្របតាមវត្ថុបំណងដែលបានកំណត់ គឺជាក្ដីរំពឹងរបស់អ្នកអប់រំគ្រប់រូប ហើយការបង្រៀន និងរៀននេះគឺជាអន្តរអំពើរវាងគ្រូ និងសិស្ស។ សិស្សគឺជាកម្មវត្ថុដ៏សំខាន់មួយ ក្នុងការទទួលយកចំណេះដឹង ប៉ុន្តែការគិតរបស់ពួកគេអាចមានកម្រិតពុំស្មើគ្នាទេ។ ទាំងអស់នេះ គឺជារឿងចាំបាច់ ដែលអ្នកអប់រំគួរតែស្វែងយល់ ដើម្បីជាជំនួយ ក្នុងការរៀបចំកម្មវិធីសិក្សាលម្អិត (syllabuses) វិធីសាស្ត្របង្រៀន(Methodologies) ការវាយតម្លៃការរៀននិងការបង្រៀ(Assessment) និងកិច្ចតែងការបង្រៀន(Lesson Plan) ឱ្យឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីសិក្សាគោល (Curriculums) របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា។

ដោយយោងលើបញ្ហានេះ ទើបក្រុមគ្រូឧទ្ទេសមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ និងគ្រូបង្រៀនសាលាជំនាន់ថ្មី បានសម្រេចលើកយកខ្លឹមសារ "វិធីបង្រៀនតាមលំនាំ5Es និងដោះស្រាយបញ្ហា" ទៅក្នុងកម្មវិធីវិក្រឹតការគ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យាថ្នាក់ជាតិ ដើម្បីធ្វើឱ្យសិក្ខាកាមអាចបញ្ជ្រាបខ្លឹមសារវិធីសាស្ត្រទាំងនេះ ដល់គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅតាមវិទ្យាល័យនានា ទូទាំងរាជធានីខេត្ត នៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា។ វិធីសាស្ត្របង្រៀនតាមលំនាំ5E មានជាតុសំខាន់ៗរួមមាន៖ ចូលរួម(engage) រុករក(explore) ពន្យល់(explain) បញ្ជាក់លម្អិត (expand/ elaborate) និងវាយតម្លៃ (evaluate)។ វិធីសាស្ត្របង្រៀនតាមបែបដោះស្រាយបញ្ហា ជាតុសំខាន់ៗ៖ ការយល់បញ្ហា (understanding the problem) ការបង្កើតផែនការ (devising the plan) ការអនុវត្តផែនការ (carrying out the plan) និងការពិនិត្យឡើងវិញ (looking back)។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សិក្ខាកាមទាំងអស់ដែលជាគ្រូគណិតវិទ្យា ព្យាយាមស្ដាប់ការពន្យល់របស់គ្រូឧទ្ទេសដោយយកចិត្តទុកដាក់ និងសិក្សាស្វែងយល់អត្ថន័យដោយខ្លួនឯង ពីការបង្រៀនតាមទ្រឹស្តី5E និងយុទ្ធវិធីដោះស្រាយបញ្ហានេះ ដើម្បីក្រេបជញ្ជក់យកខ្លឹមសារ និងគំរូនៃការបង្រៀនថ្មីៗ ទុកជាទុន ក្នុងការបណ្ដុះបណ្ដាលគ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យានៅតាមវិទ្យាល័យបន្ត និងបណ្ដុះបណ្ដាលដល់សិស្សរបស់ខ្លួន ឱ្យក្លាយជាសិស្សដែលចូលចិត្តមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា និងរៀនពូកែលើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យាថែមទៀតផង។

យើងខ្ញុំ ដែលជាគ្រូឧទ្ទេសគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ និងគ្រូបង្រៀនសាលាជំនាន់ថ្មី មានការរីករាយនឹងទទួលយកនូវការរិះគន់ទាំងឡាយ ដើម្បីកែលម្អពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ចំពោះចំណុចខ្វះខាត និងកំហុសឆ្គង ក្នុងការរៀបចំឯកសារនេះឡើង ដោយអចេតនារបស់ក្រុមយើងខ្ញុំ។

ថ្ងៃពុធ ៤រោច ខែ កត្តិក ឆ្នាំ ជូត ទោស័ក ព.ស. ២៥៦៤

រាជធានីភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី ០៤ ខែ វិច្ឆិកា ឆ្នាំ ២០២០

១. គណៈកម្មការគ្រប់គ្រង

១- ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ហង់ជួន ណារ៉ុន** រដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

២- ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ណាត ប៊ុនរឿន** រដ្ឋលេខាធិការក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

៣- ឯកឧត្តមបណ្ឌិត **សៀង សុវណ្ណា** នាយកនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

៤- ឯកឧត្តម **អ៊ុង បូរាត** នាយកខុទ្ទកាល័យក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

៥- លោក **ឌី មុណ្ណា** នាយករងនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

៦- បណ្ឌិត **នួវ ទិរ៉ា** នាយករងនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

៧- លោកស្រី **ប៊ុន សុផានី** នាយិការងនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

៨- លោក **ថៃ ហេង** នាយករងនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

២. គណៈកម្មការនិពន្ធ រៀបរៀង និងចងក្រងសៀវភៅ

១- គ្រូឧទ្ទេស **គណិតវិទ្យា** វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

២- គ្រូបង្រៀន **គណិតវិទ្យា** សាលាជំនាន់ថ្មី

៣. គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ និងកែលម្អ

១- លោក **ម៉ៅ សារឿន** ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់អប់រំនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

២- លោក **ចេង ថុន** អនុប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់អប់រំនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

៣- លោក **គឹម លាង** អនុប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់អប់រំនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

មាតិកា

បុព្វកថា...i

អារម្ភកថា ii

ខ្លឹមសារមេរៀនគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០ ភាគ១ 1

សន្លឹកកិច្ចការផ្ទះ 3

ចម្លើយកិច្ចការផ្ទះ 4

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូ ទី១ 7

ខ្លឹមសារមេរៀនគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១១កម្រិតមូលដ្ឋាន..11

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូ ទី២ 16

ខ្លឹមសារមេរៀនគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន 21

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី៣...28

ខ្លឹមសារមេរៀនគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០ ភាគ១

ជំពូកទី៣មេរៀនទី១ នៃទំព័រទី ១១១ ដល់ ១១២

ជំពូកទី៣ សមីការ និងវិសមីការ

មេរៀនទី១ សមីការដឺក្រេទី២ មានមួយអញ្ញាត

ការដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាតតាមឌីសគ្រីមីណង់

ដោះស្រាយសមីការ $x^2+4x+3=0$

តាមឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta'=(b')^2-ac$

$$\Delta'=(2)^2-(1)(3)=4-3=1$$

$$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2-\sqrt{1}}{1}=-3$$

$$x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2+\sqrt{1}}{1}=-1$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x_1=-3$ ឬ $x_2=-1$ ។

អនុវត្តសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត

ជាទូទៅ ៖ សមីការ $ax^2+bx+c=0$ $(*)$ ដែលមានមេគុណ a,b និង c ជាចំនួនពិត តាមឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta=b^2-4ac$

1) ចំពោះ $\Delta>0$ នោះសមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ។

2) ចំពោះ $\Delta=0$ នោះសមីការមានឫសឌុបជាចំនួនពិត $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ ។

3) ចំពោះ $\Delta<0$ នោះសមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ $x_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ។

សម្គាល់៖ ករណី b ជាចំនួនគូ នោះ $b=2b'$ សមីការ $(*)$ មានទម្រង់ $ax^2+2b'x+c=0$ ដែលមាន $\Delta=4(b')^2-4ac=4\left(b'^2-ac\right)$ តាង $\Delta'=b'^2-ac$ នោះឫសនៃសមីការកំណត់ដូចខាងក្រោម ៖

1) ចំពោះ $\Delta'>0$ នោះសមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta'}}{a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta'}}{a}$ ។

2) ចំពោះ $\Delta'=0$ នោះសមីការមានឫសឌុបជាចំនួនពិត $x_1=x_2=-\frac{b'}{a}$ ។

3) ចំពោះ $\Delta'<0$ នោះសមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ $x_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta'}}{a}$, $x_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta'}}{a}$ ។

ឧទាហរណ៍៖ សួនមួយមានរាងចតុកោណកែងដែលមានផ្ទៃក្រឡា $195m^2$ និងមានបណ្តោយលើសទទឹង $2m$ ។ រកវិមាត្រសួននេះ ។

ដំណោះស្រាយ៖ រកវិមាត្រសួននេះ

តាង x ជាប្រវែងទទឹង និង $x+2$ ជាប្រវែងបណ្ដោយ នោះ $x>0$

យើងបានផ្ទៃក្រឡារបស់សួនគឺ $x(x+2)=195$

$$\Rightarrow x^2+2x-195=0$$

តាម $\Delta'=b'^2-ac=1^2-(1)(-195)=196=14^2$

$$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-1-14}{1}=-15<0$$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-1+14}{1}=13$$

រកប្រវែងបណ្ដោយ $x+2=13+2=15$

+របៀបទី២ (ដាក់ជាផលគុណកត្តា)

$$x^2+2x-195=0$$
$$(x-13)(x+15)=0$$
$$x=13\ ,\ x=-15<0$$

+របៀបទី៣ (បំពេញជាការេ)

$$x^2+2x-195=0$$
$$(x+1)^2=196$$
$$x+1=\pm14$$
$$x=13\ ,\ x=-15<0$$

ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ៖

ដោយ បណ្ដោយ និងទទឹងមានប្រវែង $15m$ និង $13m$ រៀងគ្នា នោះផ្ទៃក្រឡាសួនគឺ $13\times15=195m^2$ (ពិត)។

x² + 2x -195 = 0

x = 13 , x =-15 < 0

$$x^2+2x-195=0$$
$$(x+1)^2=196$$
$$x+1=\pm14$$
$$x=13\ ,\ x=-15<0$$

ដូចនេះ វិមាត្រនៃសួន បណ្ដោយ $15m$ និងទទឹង $13m$ ។

ជាទូទៅ៖ ដើម្បីដោះស្រាយចំណោទដោយប្រើសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត គេត្រូវ

(១) ស្រង់សម្មតិកម្ម និងសំណួរឱ្យបានច្បាស់លាស់

(២) ជ្រើស ឬតាងអញ្ញាត

(៣) បង្កើតសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត រួចដោះស្រាយ

(៤) ផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយ រួចសន្និដ្ឋាន

សន្លឹកកិច្ចការផ្ទះ

១. ប្អូផាមានអាយុច្រើនជាងបូណា បច្ចុប្បន្នផលបូកអាយុបូផា និងបូណាស្មើ 20 ឆ្នាំ តែបួនឆ្នាំមុន ផលគុណនៃអាយុអ្នកទាំងពីរស្មើនឹង 27 ។ រកអាយុបូផា និងបូណា។

២. តើគេអាចបង្កើតចតុកោណកែងមួយដែលមានប្រវែងបណ្តោយស្មើនឹង ២ដងនៃប្រវែងទទឹង ហើយមានផ្ទៃក្រឡាស្មើនឹង $800m^2$ ដែរឬទេ ? បើអាច ចូររកប្រវែងបណ្តោយ និងទទឹងនៃចតុកោណកែងនោះ។

៣. ចូររកវិមាត្រនៃសួនរាងចតុកោណកែងមួយដែលមានបរិមាត្រ $80m$ និងផ្ទៃក្រឡា $400m^2$ ។

៤. រកពីរចំនួនដែលមានផលបូកស្មើ 20 និង ផលគុណស្មើ 51។

៥.ចម្ការមួយមានរាងចតុកោណកែង ដែលមានប្រវែងបណ្តោយលើសទទឹង $10m$។ គេចង់សង់របងព័ទ្ធជុំវិញចម្ការនោះ។ រកប្រវែងរបងបើចម្ការនោះមានផ្ទៃក្រឡាស្មើ $1200m^2$ ។

៦. ដីចម្ការមួយរាងចតុកោណកែងមានផ្ទៃក្រឡា $4284m^2$ ហើយមានបរិមាត្រប្រវែង $270m$ ។ គណនាវិមាត្រចម្ការ។

៧. ពូសុខមានចម្ការមួយរាងចតុកោណកែងមានទទឹងស្មើនឹង $12m$ និងបណ្តោយស្មើនឹង $16m$ ។គាត់ចង់ធ្វើផ្លូវមួយជុំវិញក្នុងចំការនោះដោយឱ្យទទឹងផ្លូវមានប្រវែងស្មើៗគ្នាហើយផ្ទៃក្រឡាដីដែលនៅសល់ពីធ្វើផ្លូវស្មើពាក់កណ្តាលនៃផ្ទៃក្រឡាទាំងមូល ។ តើពូសុខត្រូវយកទទឹងផ្លូវប្រវែងប៉ុន្មាន ?

៨. គេបោះបាល់មួយពីកំពូលអគារតាមទិសឈរ ។ រយៈពេល t វិនាទីក្រោយមកបាល់មានកម្ពស់ $-5t^2+30t+35$ ម៉ែត្រពីដី។

ក. រកកម្ពស់នៃអគារនេះ។

ខ. ករយៈពេលដែលបាល់ទៅហួសអគាររួចធ្លាក់ចុះមកវិញ។

គ. រយៈពេលដែលបាល់ធ្លាក់មកដល់ដី។

ចម្លើយកិច្ចការផ្ទះ

១. រកអាយុបូផា និងបូណា

តាង x ជាអាយុបូផា និង y ជាអាយុបូណា ដែល $x > y$

សម្មតិកម្មៈ ផលបូកអាយុបូផា និងបូណាស្មើ 20 ឆ្នាំ

បួនឆ្នាំមុន ផលគុណនៃអាយុអ្នកទាំងពីរស្មើនឹង 27

យើងបាន $\begin{cases} x+y=20 & (1) \\ (x-4)(y-4)=27 & (2) \end{cases}$

យកមួយ (1) ជំនួស (2) យើងបាន

$$(x-4)(20+y-4)=27$$
$$(x-4)(16-x)=27$$
$$-x^2+20x-91=0$$
$$(13-x)(x-7)=0$$
$$x=13,\ \ x=7$$

ដោយ $y=20-x$

ចំពោះ $x=13 \Rightarrow y=20-13=7$

ចំពោះ $x=7 \Rightarrow y=20-7=13>x$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ បូផាមានអាយុ 13 ឆ្នាំ និងបូណាអាយុ 7 ឆ្នាំ ។

២. រកប្រវែងទទឹង និងបណ្តោយ

តាង x ជាប្រវែងទទឹងគិតជាម៉ែត្រ

$2x$ ជាប្រវែងបណ្តោយគិតជាម៉ែត្រ

សម្មតិកម្មៈ ចតុកោណកែងមានបណ្តោយស្មើនឹង ២ដងនៃទទឹង និងផ្ទៃក្រឡាស្មើនឹង $800m^2$

យើងបានផ្ទៃក្រឡាសរុប $x\cdot 2x=800$

$$x^2=400$$
$$\Rightarrow 2x=40$$

ដូចនេះ បណ្តោយប្រវែង $20m$ និងទទឹងប្រវែង $40m$ ។

៣. រកប្រវែងទទឹង និងបណ្តោយ

តាង x ជាប្រវែងទទឹងគិតជាម៉ែត្រ

y ជាប្រវែងបណ្តោយគិតជាម៉ែត្រ

សម្មតិកម្មៈ ចតុកោណកែងមានបរិមាត្រ $80m$ និងផ្ទៃក្រឡា $400m^2$

យើងបានៈ $\begin{cases} 2(x+y)=80 \\ x\cdot y=400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=40 & (1) \\ x\cdot y=400 & (2) \end{cases}$

យក (1) ជំនួស (2) យើងបាន

$$(40-y)y=400$$
$$-y^2+40y-400=0$$
$$\Delta'=20^2-400=0$$
$$\Rightarrow y=-\frac{b'}{a}=20$$
$$\Rightarrow x=20$$

ដូចនេះ បណ្ដោយប្រវែង $20m$ និងទទឹងប្រវែង $20m$ ។

៤. តាង x,y ជាពីរចំនួន

សម្មតិកម្ម៖ ផលបូកស្មើ 20 និង ផលគុណស្មើ 51

យើងបាន: $\begin{cases} x+y=20 \\ xy=51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=(20-y) & (1) \\ (20-y)(y)=51 & (2) \end{cases}$

យក (1) ជំនួស (2) យើងបាន

$$-y^2+20y-51=0$$
$$\Delta'=100-51=49=7^2$$
$$y_1=\frac{-10-7}{-1}=17\Rightarrow x_1=3$$
$$y_2=\frac{-10+7}{-1}=3\Rightarrow x_2=17$$

ដូចនេះ ពីរចំនួននោះគឺ 3 និង 17 ។

៥. តាង x ជាប្រវែងទទឹងគិតជាម៉ែត្រ, $x>0$

សម្មតិកម្ម: បណ្ដោយលើសទទឹង $10m$

$\Rightarrow x+10$ ជាប្រវែងបណ្ដោយគិតជាម៉ែត្រ

គេបាន $x(x+10)=1200\Rightarrow x^2+10x-1200=0$

$$\Rightarrow x_1=-40\ ;\ x_2=30$$

ដោយ $x>0 \quad \Rightarrow x=30$

គេបាន ប្រវែងរបងគឺ $(30+40)\times 2=140m$

ដូចនេះ ប្រវែងរបង $140m$ ។

៦.តាង x ជាបណ្ដោយគិតជាម៉ែត្រ និង y ជាទទឹងគិតជាម៉ែត្រ $x,y>0$

គេបាន $\begin{cases} xy=4284 & (1) \\ 2(x+y)=270 & (2) \end{cases}$

តាម(2) $\Rightarrow x+y=135\Rightarrow x=135-y$

តាម(1) $\Rightarrow (135-y)y=4284$

$-y^2+135y-4284=0$

$\Delta=135^2-4(4284)=1089\Rightarrow\sqrt{\Delta}=33$

$y_1=\dfrac{-135-33}{-2}=84\Rightarrow x_1=51$

$y_2=\dfrac{-135+33}{-2}=51\Rightarrow x_1=84$

ដូចនេះ បណ្ដោយ $84m$ និងទទឹង $51m$ ។

៧.រកប្រវែងទទឹងផ្លូវ

តាង x ជាប្រវែងទទឹងផ្លូវដែលត្រូវរក ដែល $0<x<12$

ផ្ទៃក្រឡាចម្ការសរុបស្មើ $12\times16=192m^2$ នោះផ្ទៃដីចម្ការដែលនៅសល់ពីធ្វើផ្លូវគឺ

$$(16-2x)(12-2x)=\frac{192}{2} \quad \text{ឬ} \quad \Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-56x+96=0\\ x^2-14x+24=0\end{cases}$$

$\Rightarrow x_1=12;x_2=2$ តែ $0<x<12$

ដូចនេះ ប្រវែងទទឹងផ្លូវគឺ $x=2m$

៨.ក. រកកម្ពស់អគារ

ពេលបាល់នៅលើអគារ នោះរយៈពេល $t=0$

$\Rightarrow h=-5.0^2+30.0+35=35$

ដូចនេះ អគារមានកម្ពស់ $35m$ ។

ខ. រករយៈពេលដែលបាល់ទៅហួលអគារ រួចធ្លាក់ចុះ

ពេលបាល់ធ្លាក់ចុះ ហើយកំពស់ $h=35$

$\Rightarrow -5t^2+30t=0\Rightarrow t(-5t+30)=0$

$\Rightarrow t=0$ វិនាទី គេបាន បាល់នៅលើអគារ , $t=6$ វិនាទី

ដូចនេះ រយៈពេលបាល់ទៅហួសអគារ រួចធ្លាក់ចុះគឺ 6 វិនាទី ។

គ. រករយៈពេលដែលបាល់ធ្លាក់ដល់ដី

$\Rightarrow -5t^2+30t+35=0\ ,t>0$

$t^2-6t-5=0$

$(t-7)(t+1)=0\Rightarrow t=7$ វិនាទី $t=-1<0$

ដូចនេះ រយៈពេលដែលបាល់ធ្លាក់ដល់ដី 7 វិនាទី ។

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូ ទី១

កាលបរិច្ឆេទ៖ ថ្ងៃ......... ខែ .... ឆ្នាំ .... ព.ស. ២៥៦......

ត្រូវនឹងថ្ងៃទី .... ខែ .... ឆ្នាំ ២០.............

មុខវិជ្ជា៖ គណិតវិទ្យា

បង្រៀនថ្នាក់៖ ទី ១០

ជំពូកទី៣៖ សមីការ និងវិសមីការ

មេរៀនទី១៖ សមីការដឺក្រេទី២ មានមួយអញ្ញាត្ត

១.៥ អនុវត្តន៍សមីការដឺក្រេទី២ មានមួយអញ្ញាត

រយៈពេល៖ 50 នាទី

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- **វិជ្ជាសម្បទា៖** សិស្សរៀបរាប់បានពីរបៀបដោះស្រាយចំណោទសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈសំណួរបំផុសរបស់គ្រូ ។
- **បំណិនសម្បទា៖** សិស្សដោះស្រាយចំណោទសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត្តបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាជាក្រុម ។
- **ចរិយាសម្បទា៖** សិស្សាមានសាមគ្គីភាពក្នុងក្រុម និងយកចិត្តទុកដាក់រៀនសូត្រ ។

II. សម្ភារៈឧបទេសៈ សៀវភៅគោលគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០ ភាគ១ទំព័រទី១១១, ផ្ទាំងរូបមន្ត, សន្លឹកកិច្ចការ

III. វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖តាមបែប ដោះស្រាយបញ្ហា (Problem Solving Method)

IV. ដំណើរការបង្រៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារ	សកម្មភាពសិស្ស
	ជំហានទី១៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់ (៣នាទី)	
គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន សណ្ដាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យ	អវត្តមាន សណ្ដាប់ធ្នាប់ និង អនាម័យ	ប្រធានឡើងប្រាប់គ្រូពីវត្តមាន សណ្ដាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យ
	ជំហានទី២៖ រំលឹកមេរៀនចាស់ (៧នាទី)	
ចូរដោះស្រាយសមីការ $x^2+4x+3=0$ ។	សមីការ: $x^2+4x+3=0$ តាមឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta'=b'^2-ac$ $\Delta'=(-2)^2-(1)(3)=4-3=1$ $x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2-\sqrt{1}}{1}=-3$ $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2+\sqrt{1}}{1}=-1$ ដូចនេះ $x_1=-3$ និង $x_2=-1$ ។	សមីការ: $x^2+4x+3=0$ តាមឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta'=b'^2-ac$ $\Delta'=(-2)^2-(1)(3)=4-3=1$ $x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2-\sqrt{1}}{1}=-3$ $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2+\sqrt{1}}{1}=-1$ ដូចនេះ $x_1=-3$ និង $x_2=-1$ ។

ជំហានទី៣៖ មេរៀនថ្មី (៣០នាទី)		
បែងចែកសិស្សជាក្រុមអោយអានប្រធានលំហាត់ដើម្បីកំណត់សម្មតិកម្ម និងសំណួរ **១.យល់បញ្ហា** ចូរប្អូនស្រង់៖ • ពាក្យគន្លឹះនិងពន្យល់ន័យរបស់វា • សម្មតិកម្ម សំណួរ **២.ការបង្កើតផែនការ** • តើយើងតាងអញ្ញាតអ្វីជាទទឹង ? • តើបណ្តោយសរសេរទាក់ទងនឹងវាបានដូចម្តេច ? • ក្រឡាផ្ទៃគឺ 195 តើប្អូនអាចសរសេរបានសមីការដូចម្តេច ? • សមីការនេះជាសមីការអ្វី ? • តើគេអាចដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាតបានប៉ុន្មានរបៀប ?	**ជំពូក៣៖ សមីការនិង វិសមីការ** **មេរៀនទី១ សមីការដឺក្រេទី២ មានមួយអញ្ញាត** **១.៥ អនុវត្តន៍សមីការដឺក្រេទី២ មានមួយអញ្ញាត** **ឧទាហរណ៍៖** សួនមួយមានរាងចតុកោណកែងដែលមានក្រឡាផ្ទៃ $195m^2$ និងបណ្តោយមានប្រវែងលើសទទឹង $2m$ ។ រកវិមាត្រសួននេះ ។ **ចម្លើយ៖** តាង x ជាប្រវែងទទឹង នោះ $x+2$ ជាប្រវែងបណ្តោយ ដែល $x>0$ $x(x+2)=195$ $x^2+2x-195=0$ តាម $\Delta'=b'^2-ac$ $\Delta'=\left(\frac{2}{2}\right)^2-1(-195)=196=14^2$ គេបាន $x_1=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-1+14}{1}=13$ $x_2=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-1-14}{1}=-15$ តែ $x_2=-15<0$ មិនយក រកបណ្តោយ $x+2=13+2=15$ យកប្រវែងបណ្តោយគុណនិងទទឹង $13\times15=195$ ពិត ។ **របៀបទី២** (ដាក់ជាផលគុណកត្តា)	សិស្សព្យាយាមអានប្រធានលំហាត់ជាក្រុម **១.យល់បញ្ហា** ពាក្យគន្លឹះ • វិមាត្រ៖ បណ្តោយ និង ទទឹង ត្រូវតែវិជ្ជមាន • ផ្ទៃក្រឡា៖ បណ្តោយគុណទទឹង ក្រឡាផ្ទៃ $195m^2$ និងមានបណ្តោយលើសទទឹង $2m$ សំណួរ៖ រកវិមាត្រ **២.ការបង្កើតផែនការ** • តាង x ជាទទឹងដែល $x>0$ • បណ្តោយអាចសរសេរ $x+2$ • ក្រឡាផ្ទៃស្មើបណ្តោយគុណទទឹង គេបានសមីការ $x(x+2)=195$ • សមីការនេះជាសមីការដឺក្រេទី២ មានមួយអញ្ញាត • ដាក់ជាផលគុណកត្តា ,ការបំពេញជាការេ , ឌីសគ្រីមីណង់

៣. អនុវត្តន៍ផែនការ • ចូរប្អូនយកលំនាំនៃវិធីដោះស្រាយខាងលើនេះ **៤. ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ** • ចូរប្អូនធ្វើការផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយឡើងវិញ។ • ចាប់ឆ្នោតយកក្រុមណាមួយធ្វើការបកស្រាយចម្លើយ • ចូរប្អូនរើសយកការដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២មានរបៀបផ្សេងទៀត	$x^2+2x-195=0$ $(x-13)(x+15)=0$ $x-13=0\Rightarrow x=13$ $x+15=0\Rightarrow x=-15<0$ **របៀបទី៣** (បំពេញជាការេ) $x^2+2x-195=0$ $(x+1)^2=196$ $x+1=\pm 14$ $x+1=14\Rightarrow x=13$ $x+1=-14\Rightarrow x=-15<0$ ដូចនេះវិមាត្រនៃសួនគឺ បណ្ដោយ $15cm$ ទទឹង $13cm$ ។	**៣. អនុវត្តន៍ផែនការ** $x(x+2)=195$ $x^2+2x-195=0$ តាម $\Delta'=b'^2-ac$ $\Delta'=\left(\frac{2}{2}\right)^2-1(-195)=196=14^2$ គេបាន $x_1=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-1+14}{1}=13$ $x_2=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-1-14}{1}=-15$ តែ $x_2=-15<0$ មិនយករកបណ្ដោយ $x+2=13+2=15$ **៤. ត្រួតពិនិត្យឡើងវិញ** យកប្រវែងបណ្ដោយគុណនិងទទឹង $13\times15=195$ ពិត ។ • តំណាងក្រុមឡើងដោះស្រាយចម្លើយ • ដោះស្រាយតាមការដាក់ជាផលគុណកត្តា និងបំពេញជាការេ **របៀបទី២** (ដាក់ជាផលគុណកត្តា) $x^2+2x-195=0$ $(x-13)(x+15)=0$ $x-13=0\Rightarrow x=13$ $x+15=0\Rightarrow x=-15<0$ **របៀបទី៣** (បំពេញជាការេ) $x^2+2x-195=0$ $(x+1)^2=196$ $x+1=\pm 14$ $x+1=14\Rightarrow x=13$ $x+1=-14\Rightarrow x=-15<0$ ដូចនេះវិមាត្រនៃសួនគឺ បណ្ដោយ $15cm$ ទទឹង $13cm$ ។

ជំហានទី៤៖ ពង្រឹងចំណេះដឹង (៥នាទី)		
ដើម្បីដោះស្រាយចំណោទសមីការតើប្អូនត្រូវធ្វើដូចម្តេច?	• តាងអញ្ញាត • សរសេរសមីការ • តាមបម្រាប់ • ដោះស្រាយសមីការ • ផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយ	• តាងអញ្ញាត • សរសេរសមីការតាមបម្រាប់ • ដោះស្រាយសមីការ • ផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយ
ជំហានទី៥៖ កិច្ចការផ្ទះ និងបណ្តាំផ្ញើ (៥នាទី)		
ចែកសន្លឹកកិច្ចការផ្ទះឲ្យសិស្ស	លំហាត់ ទី១,២និងទី៣	សិស្សទទួលសន្លឹកកិច្ចការ

សន្លឹកកិច្ចការផ្ទះ

១. រ៉ាដាមានអាយុច្រើនជាងជីវ៉ា។ បច្ចុប្បន្នផលបូកអាយុរ៉ាដា និងជីវ៉ាស្មើ 50 ឆ្នាំ ។ តែបួន ឆ្នាំមុន ផលគុណនៃអាយុអ្នកទាំងពីរស្មើនឹង 100 ឆ្នាំ ។ រកអាយុរបស់រ៉ាដា និងជីវ៉ា។

២. តើគេអាចបង្កើតចតុកោណកែងមួយដែលមានបណ្តោយស្មើនឹង ២ដងនៃទទឹង ហើយមានផ្ទៃ ក្រឡាស្មើនឹង $800m^2$? បើអាច ចូររកប្រវែងបណ្តោយ និងទទឹង។

៣. ចូររកវិមាត្រនៃសួនរាងចតុកោណកែងមួយដែលមានបរិមាត្រ $80m$ និង ផ្ទៃក្រឡា $400m^2$ ។

៤. រកពីរចំនួនដោយស្គាល់ផលបូកស្មើ 20 និង ផលគុណស្មើនឹង 51។

៥. ចម្ការមួយមានរាងចតុកោណកែង មានបណ្តោយលើសទទឹង $10m$ ។ គេចង់សងរបងព័ទ្ធជុំ វិញចំការនោះ ។ រកប្រវែងរបង បើចម្ការនោះមានផ្ទៃក្រឡាស្មើនឹង $1200m^2$ ។

៦. ដីចម្ការមួយរាងចតុកោណកែងមានផ្ទៃក្រឡា $4284m^2$ ហើយមានបរិមាត្រប្រវែង $270m$ ។ គណនាវិមាត្រចម្ការ។

៧. ពូសុខមានចម្ការមួយរាងចតុកោណកែងមានទទឹងស្មើនឹង $12m$ និងបណ្តោយស្មើនឹង $16m$ ។ គាត់ចង់ធ្វើផ្លូវ មួយជុំវិញក្នុងចម្ការនោះ ដោយឱ្យទទឹងផ្លូវមានប្រវែងស្មើៗគ្នា ហើយផ្ទៃក្រឡាដីដែលនៅសល់ពី ធ្វើផ្លូវស្មើពាក់កណ្តាលនៃផ្ទៃក្រឡាទាំងមូល ។ តើពូសុខត្រូវយកទទឹងផ្លូវប្រវែងប៉ុន្មាន?

៨. គេបោះបាល់មួយពីកំពូលអគារតាមទិសឈរ។ រយៈពេល ៥ វិនាទីក្រោយមកបាល់មានកម្ពស់ $-5t^2+30t+35$ ម៉ែតពីដី ។

ក. រកកម្ពស់អគារនោះ ។

ខ.រករយៈពេលដែលបាល់ទៅហួសអគាររួចធ្លាក់ចុះមកវិញ ។

គ. រករយៈពេលដែលបាល់ធ្លាក់មកដល់ដី ។

ខ្លឹមសារមេរៀនគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១១កម្រិតមូលដ្ឋាន
ជំពូកទី៤ មេរៀនទី១ ទំព័រទី ១២២ ដល់ ១២៦

ជំពូកទី៤ ម៉ាទ្រីសនិងដេទែរមីណង់

មេរៀនទី១ ម៉ាទ្រីស

វិធីគុណនៃពីរម៉ាទ្រីស

គេឱ្យម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ចូរបំពេញចន្លោះ ។

ក.ម៉ាទ្រីសនេះមានលំដាប់...

ខ.ជាតុ $a_{12} = ..., a_{22} = ... \ , a_{23} = ...$

ចម្លើយ

ក.ម៉ាទ្រីសនេះមានលំដាប់ 2×3

ខ.ជាតុ $a_{12} = 4, \ a_{22} = 3 \ , a_{23} = 4$

ឧទាហរណ៍៖ សុខនិងសៅត្រូវការទិសសៀវភៅ ប៊ិក និងខ្មៅដៃនៅតូបចំនួនពីរដែលបង្ហាញដោយម៉ាទ្រីសខាងក្រោម

ម៉ាទ្រីសមុខទំនិញ

$$\begin{matrix} & \text{ស} & \text{ប} & \text{ខ} \\ \text{សុខ} & 18 & 12 & 11 \\ \text{សៅ} & 16 & 20 & 10 \end{matrix}$$

ម៉ាទ្រីសតម្លៃ១ឯកតាតាមតូប

$$\begin{matrix} & \text{១} & \text{២} \\ \text{ស} & 7 & 6 \\ \text{ប} & 4 & 5 \\ \text{ខ} & 2 & 2 \end{matrix}$$

តើពួកគេគួរទិញតូបមួយណាដើម្បីចំណាយលុយតិច?

ចម្លើយ៖ ប្រាក់ចំណាយសរុបរបស់សុខ

នៅតូបទី១ $18(7)+12(4)+11(2)=196$

នៅតូបទី២ $18(6)+12(5)+12(2)=190$

ប្រាក់ចំណាយសរុបរបស់សៅ

នៅតូបទី១ $16(7)+20(4)+10(2)=212$

នៅតូបទី២ $16(6)+20(5)+10(2)=216$

ដូចនេះ សុខគួរទិញនៅតូបទី២ហើយសៅគួរទិញនៅតូបទី១។

សន្និដ្ឋាន៖ ការចំណាយរបស់សុខ និងសៅអាចសរសេរជាម៉ាទ្រីសខាងក្រោម

តូបទី១ តូបទី២

$$\begin{matrix}\text{សុខ}\\ \text{សៅ}\end{matrix}\begin{bmatrix}196 & 190\\ 212 & 216\end{bmatrix}$$

ពិនិត្យ

$$\begin{bmatrix}18 & 12 & 11\\ 16 & 20 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 6\\ 4 & 5\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18(7)+12(4)+11(2) & 18(6)+12(5)+11(2)\\ 16(7)+20(4)+10(2) & 16(6)+20(5)+10(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}196 & 190\\ 212 & 216\end{bmatrix}$$

$$A \times B = C$$

ដើម្បីគុណម៉ាទ្រីស A និង B តើគេត្រូវធ្វើដូចម្ដេច?

គេឱ្យម៉ាទ្រីស

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix} \text{ និង } B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

ក. គណនា $A\times B$

ខ. គណនា $B\times A$

ចម្លើយ៖ ក. គណនា $A\times B$

$$A\times B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2(2)+1(1) & 2(-1)+1(2) & 2(2)+1(5)\\ 3(2)+4(1) & 3(-1)+4(2) & 3(2)+4(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 9\\ 10 & 5 & 26\end{bmatrix}$$

ខ. គណនា $B\times A$

$$B\times A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(2)-1(3)+2(?) & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{bmatrix}$$

មិនអាចគុណបានព្រោះចំនួនជួរដេកនៃម៉ាទ្រីសទី១មិនស្មើចំនួនជួរឈរនៃម៉ាទ្រីសទី២។

ជាទូទៅ៖

(១) ម៉ាទ្រីសពីរគុណគ្នាបាន កាលណាចំនួនជួរដេកនៃម៉ាទ្រីសទី១ស្មើនឹងចំនួនជួរឈរនៃម៉ាទ្រីសទី២

(២) បើគេមាន A ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $(m\times n)$ និងម៉ាទ្រីស B ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $(m\times n)$ ដែល $A=\left[a_{ik}\right]; B=\left[b_{kj}\right]$ នោះផលគុណរវាងម៉ាទ្រីស A និង B គឺម៉ាទ្រីស $C=\left[c_{ij}\right]$ ដែលមានលំដាប់ $(m\times p)$ ដែល c_{ij} បានមកពីផលគុណនៃជួរដេកទី i នៃម៉ាទ្រីស A និងជួរឈរទី j នៃម៉ាទ្រីស B ។

សម្គាល់៖ តាង A និង B ជាម៉ាទ្រីស នោះ $AB\neq BA$

លំហាត់៖ គណនាផលគុណម៉ាទ្រីស AB ដោយដឹងថា

ម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}3&1\\2&4\\6&5\\1&2\end{bmatrix}$ និងម៉ាទ្រីស $B=\begin{bmatrix}-3&1\\4&2\end{bmatrix}$។

ចម្លើយ៖ គណនាផលគុណម៉ាទ្រីស AB ~~និង BA~~។

$$AB=\begin{bmatrix}3&1\\2&4\\6&5\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(-3)+1(4)&3(1)+1(2)\\2(-3)+4(4)&2(1)+4(2)\\6(-3)+5(4)&6(1)+5(2)\\1(-3)+2(4)&1(1)+2(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&5\\10&10\\2&16\\5&5\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $AB=\begin{bmatrix}-5&5\\10&10\\2&16\\5&5\end{bmatrix}$ ។

លំហាត់កិច្ចការផ្ទះ

សិស្សបីនាក់មានឈ្មោះ A, B និង C ដោះស្រាយលំហាត់ចំនួន 8សំណួរ ។ សិស្ស A ឆ្លើយត្រឹមត្រូវល្អបាន4 សំណួរ ត្រូវខ្លះបាន1 សំណួរ និងខុស 3 សំណួរ។ សិស្ស B ឆ្លើយត្រឹមត្រូវល្អបាន 5សំណួរ ត្រូវខ្លះបាន 2 សំណួរ និង ខុស 1សំណួរ រីឯសិស្ស C ឆ្លើយត្រឹមត្រូវល្អបាន 2 សំណួរត្រូវខ្លះបាន 4សំណួរ និងខុស 2 ។ គេសន្មតថាចម្លើយត្រឹមត្រូវល្អបានពិន្ទុ 3 ត្រូវខ្លះបានពិន្ទុ 1 និងខុសបានពិន្ទុ 0 ។

ក. ចូរសរសេរចំនួនចម្លើយរបស់សិស្សម្នាក់ៗធ្វើបានជាម៉ាទ្រីស និងរបបពិន្ទុនៃចម្លើយជាម៉ាទ្រីស។

ខ.ចូររកម៉ាទ្រីសពិន្ទុសរុបរបស់សិស្សម្នាក់ៗ ។

ចម្លើយ៖ ក. សរសេរចំនួនចម្លើយរបស់សិស្សម្នាក់ៗធ្វើបានជាម៉ាទ្រីស និងរបបពិន្ទុនៃចម្លើយជាម៉ាទ្រីស តាង X ជាម៉ាទ្រីសចម្លើយរបស់សិស្សម្នាក់ និង Y ជាម៉ាទ្រីសរបស់របបពិន្ទុនៃចម្លើយ

គេបាន $X=\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}\begin{bmatrix}4&5&2\\1&2&4\\3&1&2\end{bmatrix}$ និង $Y=\begin{matrix}\text{ត្រូវល្អ}\\\text{ត្រូវខ្លះ}\\\text{ខុស}\end{matrix}\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$

ខ.រកម៉ាទ្រីសពិន្ទុសរុបរបស់សិស្សម្នាក់ៗ

$$XY=\begin{bmatrix}4&5&2\\1&2&4\\3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4(3)+5(1)+0\\1(3)+2(1)+0\\3(1)+1(1)+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\5\\10\end{bmatrix}$$

លំហាត់បន្ថែម

១.គណនា

ក. $\begin{bmatrix}12 & 4 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 7 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix}3 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}29\\ 5\\ -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15\end{bmatrix}$

ចម្លើយ

ក. $\begin{bmatrix}12 & 4 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 7 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12+4(7)-2(6) & 12(-1)+4(4)+2(5)\\ 2(2)-3(7)+1(6) & 2(-1)-3(4)+1(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}40 & -6\\ -11 & -9\end{bmatrix}$

ខ. $\begin{bmatrix}3 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}29\\ 5\\ -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(29)-2(5)+4(-6)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}53\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}68\end{bmatrix}$

២. គេឱ្យ $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & -7\\ a & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -2\\ 6 & 3c\end{bmatrix}$។រកតម្លៃ a ,b និង c ។

ចម្លើយ

រកតម្លៃ a ,b និង c

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & -7\\ a & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -2\\ 6 & 3c\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}0(b)+1(1) & 0(-7)+1(0)\\ -2(b)+0(a) & -2(-7)+0(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & -1+3c\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a & 0\\ -2b & 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & -1+3c\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ -2b=6\\ -1+3c=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-3\\ c=5\end{cases}$$

ដូចនេះ $a=1$,$b=$ $b=-3$ និង $c=5$ ។

៣. គេដឹងថាតម្លៃសំបុត្រចូលទស្សនាពិព័រណ៌មួយសន្លឹកសម្រាប់កូនក្មេង 2000 រៀល មនុស្សចាស់ 5000 រៀលនិងជនបរទេស10000 រៀល។សំបុត្រដែលលក់បាននៅចុងសប្ដាហ៍កន្លងទៅសង្ខេបក្នុងតារាងខាងក្រោម៖

	កូនក្មេង	មនុស្សចាស់	ជនបរទេស
ថ្ងៃសៅរ៍	205	160	70
ថ្ងៃអាទិត្យ	310	200	65

ក. តាងតម្លៃសំបុត្រជាម៉ាទ្រីសជួរឈរ C ។
ខ. តាងពត៌មានក្នុងតារាងខាងលើជាម៉ាទ្រីស N ។
គ. គណនាផលគុណ NC ។តើជាតរបស់ NC តាងឱ្យអ្វី?
ចម្លើយ៖ ក. តាងតម្លៃសំបុត្រជាម៉ាទ្រីសជួរឈរ C ។

$$C = \begin{bmatrix} 2000 \\ 5000 \\ 10000 \end{bmatrix}$$

ខ. តាងព័ត៌មានក្នុងតារាងខាងលើជាម៉ាទ្រីស N ។

$$N = \begin{bmatrix} 250 & 160 & 70 \\ 310 & 200 & 65 \end{bmatrix}$$

គ. គណនាផលគុណ NC ។តើជាតុរបស់ NC តាងឱ្យអ្វី?

$$NC = \begin{bmatrix} 205 & 160 & 70 \\ 310 & 200 & 65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2000 \\ 5000 \\ 10000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 205\times 2000 & 160\times 5000 & 70\times 10000 \\ 310\times 2000 & 200\times 5000 & 65\times 10000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 410000 & 800000 & 700000 \\ 620000 & 1000000 & 650000 \end{bmatrix}$$

ជាតុរបស់ NC ~~តាងឱ្យ~~តាងឱ្យតម្លៃសំបុត្រដែលទទួលបានពី កូនក្មេង មនុស្សចាស់ និងជនបរទេសសម្រាប់ថ្ងៃសៅរ៍ និងថ្ងៃអាទិត្យ។

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូ ទី២

កាលបរិច្ឆេទ៖ ថ្ងៃ ៣រោច ខែកត្តិក ឆ្នាំជូត ទោស័ក ព.ស ២៥៦៤ត្រូវនឹងថ្ងៃ អង្គារ ខែវិច្ឆិកាឆ្នាំ២០២០

មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៖ ១១ (កម្រិតមូលដ្ឋាន)

ជំពូកទី៤ ៖ ម៉ាទ្រីស និងដេទែរមីណង់

មេរៀនទី១ ៖ ម៉ាទ្រីស

២. ប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីស

២.៤ វិធីគុណនៃពីរម៉ាទ្រីស

រយៈពេល ៖ ៩០នា ទី

I. **វត្ថុបំណង** ៖ ក្រោយពីបានសិក្សាខ្លឹមសារមេរៀននេះចប់៖

- **វិជ្ជាសម្បទា**៖សិស្សរៀបរាប់បានពីផលគុណនៃពីរម៉ាទ្រីសបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាជាដៃគូ
- **បំណិនសម្បទា**៖ គណនាផលគុណនៃពីរម៉ាទ្រីសបានយ៉ាងត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពិភាក្សាជាដៃគូ
- **ចរិយាសម្បទា**៖ មានទម្លាប់ធ្វើការងារជាមួយគ្នា និងមានស្មារតីយកចិត្តទុកដាក់រៀនសូត្រ។

II. **សម្ភារៈឧបទេស**

- សៀវភៅសិក្សាគោល និងសៀវភៅគ្រូទំព័រទី 122-126
- ក្រដាសA_4និងហ្វឺត

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖ ស្ថាបនានិយមតាមលំនាំគំរូ** 5Es

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារ	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ ៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់(៥នាទី)		
ពិនិត្យអវត្តមានសណ្តាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យ	អវត្តមានសណ្តាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យ	ប្រធានថ្នាក់រាយការណ៍
ជំហានទី២ ៖ រំលឹកមេរៀនចាស់(១០នាទី)		

គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ ឱ្យសិស្សធ្វើ រួចហៅសិស្សឡើងបំពេញ	ឧទាហរណ៍៖គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}2&4&5\\1&3&4\end{bmatrix}$។ចូរបំពេញចន្លោះ ក.ម៉ាទ្រីសនេះជាម៉ាទ្រីសលំដាប់...... ខ.ជាតុ $a_{12}=\dots, a_{22}=\dots, a_{23}=\dots$ **ចម្លើយ** ក.ម៉ាទ្រីសនេះជាម៉ាទ្រសលំដាប់2x3 ខ.ជាតុ $a_{12}=4, a_{22}=3, a_{23}=4$	សិស្សឡើងបំពេញចម្លើយ ក.ម៉ាទ្រីសនេះជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ 2x3 ខ.ជាតុ $a_{12}=4, a_{22}=3, a_{23}=4$

ជំហានទី៣ ៖ មេរៀនថ្មី (៤៥នាទី)		
ចូលរួម(Engage) (១)ឱ្យសិស្សអានលំហាត់ និងឱ្យពួកគេបញ្ជាក់ពីអត្ថន័យនៃម៉ាទ្រីសនីមួយៗ (២) ឱ្យសិស្សពិនិត្យសំណួរ នឹងរកមធ្យោបាយដោះស្រាយ **រុករក** (Explore) បែងចែកសិស្សជាក្រុម រួចឲ្យសិស្សពិភាក្សាគ្នាដើម្បីដោះស្រាយលំ	លំហាត់៖ សុខនិងសៅត្រូវការទិសសៀវភៅ ប៊ិក និងខ្មៅដៃនៅតូបចំនួនពីរដែលបង្ហាញដោយម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖ ម៉ាទ្រីសមុខទំនិញ 　　ស　ប　ខ សុខ $\begin{bmatrix}18&12&11\\16&20&10\end{bmatrix}$ សៅ ម៉ាទ្រីសតម្លៃ១ឯកតា ស $\begin{bmatrix}7&6\\4&5\\2&2\end{bmatrix}$ ប ខ តូបទី១　តូបទី២ តើពួកគេគួរទិញសម្ភារៈខាងលើពីតូបមួយណាដើម្បីឱ្យការចំណាយរបស់ពួកគេអស់តិច? **ចម្លើយ** ថ្លៃទិញរបស់សុខ	**ចូលរួម**(Engage) (១) សិស្សសង្កេត និងប្រាប់ពីអត្ថន័យជាតុនៃម៉ាទ្រីសនីមួយៗ (២) សិស្សសង្កេត និងពិចារណាលើរបៀបនៃការសម្រេចចិត្តទិញរបស់ពួកគេ **រុករក** (Explore) សិស្សពិភាក្សាជាក្រុមដោះស្រាយលំហាត់ **ពន្យល់** (Explain) សិស្សពន្យល់ចម្លើយតាមក្រុមនីមួយៗ ៖ ថ្លៃទិញរបស់សុខ 　　នៅតូបទី១ $18(7)+12(4)+11(2)=196$

<table>
<tr>
<td>ហាត់ ដោយគ្រូដើរសម្របសម្រួល
ពន្យល់ (Explain)
ឲ្យសិស្សពន្យល់ចម្លើយតាមក្រុមនីមួយៗ ។
គ្រូសួរសំណួរផ្សេងៗពាក់ព័ន្ធនឹងចម្លើយរបស់សិស្ស ឬផ្តល់តម្រុយផ្សេងៗបើមានការចាំបាច់។

បញ្ជាក់លម្អិត (Elaborate)
• សរសេរតម្លៃដែលសុខ និងសៅទិញនៅតូបទី១ និងទី២ជាម៉ាទ្រីស?
• តើគេអាចបំប្លែងជាម៉ាទ្រីសបានក្នុងល័ក្ខខណ្ឌបែបណា?
• ទាញភាពទូទៅពីប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីសពីរ</td>
<td>នៅតូបទី១
$18(7)+12(4)+11(2)=196$
នៅតូបទី២
$18(6)+12(5)+12(2)=190$
ថ្លៃទិញរបស់សៅ
នៅតូបទី១
$16(7)+20(4)+10(2)=212$
នៅតូបទី២
$16(6)+20(5)+10(2)=216$
ដូចនេះ សុខគួរទិញនៅតូបទី២ហើយសៅគួរទិញនៅតូបទី១។

តូបទី១ តូបទី២
$C=\begin{bmatrix}196 & 190\\ 212 & 216\end{bmatrix}$ សុខ / សៅ
$=\begin{bmatrix}18(7)+12(4)+11(2) & 18(6)+12(5)+11(2)\\ 16(7)+20(4)+10(2) & 16(6)+20(5)+10(2)\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}18 & 12 & 11\\ 16 & 20 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 6\\ 4 & 5\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

ជាទូទៅ៖
(១) ម៉ាទ្រីសពីរគុណគ្នាបាន កាលណាចំនួនជួរដេកនៃម៉ាទ្រីសទី១ស្មើនឹងចំនួនជួរឈរនៃម៉ាទ្រីសទី២
(២) បើគេមាន A ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $(m\times n)$ និងម៉ាទ្រីស B ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $(m\times n)$ ដែល $A=[a_{ik}]\,;B=[b_{kj}]$ នោះ ផលគុណរវាងម៉ាទ្រីស A និង B គឺម៉ាទ្រីស</td>
<td>នៅតូបទី២
$18(6)+12(5)+12(2)=190$
ថ្លៃទិញរបស់សៅ
នៅតូបទី១
$16(7)+20(4)+10(2)=212$
នៅតូបទី២
$16(6)+20(5)+10(2)=216$
ដូចនេះ សុខគួរទិញនៅតូបទី២ហើយសៅគួរទិញនៅតូបទី១។
បញ្ជាក់លម្អិត (Elaborate)
តូបទី១ តូបទី២
$C=\begin{bmatrix}196 & 190\\ 212 & 216\end{bmatrix}$ សុខ / សៅ

$=\begin{bmatrix}18(7)+12(4)+11(2) & 18(6)+12(5)+11(2)\\ 16(7)+20(4)+10(2) & 16(6)+20(5)+10(2)\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}18 & 12 & 11\\ 16 & 20 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 6\\ 4 & 5\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

សិស្សកត់ត្រាទុក</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>$C=\left[c_{ij}\right]$ ដែលមានលំដាប់ $(m\times p)$ ដែល c_{ij} បានមកពីផលគុណនៃជួរដេកទី i នៃម៉ាទ្រីស A និងជួរឈរទី j នៃម៉ាទ្រីស B ។
សម្គាល់៖ តាង A និង B ជាម៉ាទ្រីស នោះ $AB\neq BA$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">**ជំហានទី៤ ៖ ពង្រឹងចំណេះដឹង (២៥នាទី)**</td></tr>
<tr><td>**វាយតម្លៃ (Evaluate)**
លំហាត់៖ គណនាផលគុណម៉ាទ្រីស $A\cdot B$ និង $B\cdot A$ ដោយដឹងថាម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}3&1\\2&4\\6&5\\1&2\end{bmatrix}$ និង ម៉ាទ្រីស $B=\begin{bmatrix}-3&1\\4&2\end{bmatrix}$ ។</td><td>**ចម្លើយ**
គណនាផលគុណម៉ាទ្រីស $A\cdot B$
$AB=\begin{bmatrix}3&1\\2&4\\6&5\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&1\\4&2\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}3(-3)+1(4)&3(1)+1(2)\\2(-3)+4(4)&2(1)+4(2)\\6(-3)+5(4)&6(1)+5(2)\\1(-3)+2(4)&1(1)+2(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&5\\10&10\\2&16\\5&5\end{bmatrix}$
ដូចនេះ $AB=\begin{bmatrix}-5&5\\10&10\\2&16\\5&5\end{bmatrix}$
BA មិនអាចគណនាបានព្រោះចំនួនជួរឈរនៃម៉ាទ្រីស B មិនស្មើចំនួនជួរដេកនៃម៉ាទ្រីស A ។</td><td>**វាយតម្លៃ (Evaluate)**
ចម្លើយ
គណនាផលគុណម៉ាទ្រីស $A\cdot B$
$AB=\begin{bmatrix}3&1\\2&4\\6&5\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&1\\4&2\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}3(-3)+1(4)&3(1)+1(2)\\2(-3)+4(4)&2(1)+4(2)\\6(-3)+5(4)&6(1)+5(2)\\1(-3)+2(4)&1(1)+2(2)\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}-5&5\\10&10\\2&16\\5&5\end{bmatrix}$
ដូចនេះ $AB=\begin{bmatrix}-5&5\\10&10\\2&16\\5&5\end{bmatrix}$
BA មិនអាចគណនាបានព្រោះចំនួនជួរឈរនៃម៉ាទ្រីស B មិនស្មើចំនួនជួរដេកនៃម៉ាទ្រីស A ។</td></tr>
<tr><td colspan="3">**ជំហានទី៥ ៖ កិច្ចការផ្ទះ និងបណ្ដាំផ្ញើ (០៥នាទី)**</td></tr>
<tr><td>ដាក់កិច្ចការផ្ទះឱ្យសិស្ស</td><td>លំហាត់ប្រតិបត្តិទំព័រទី១២៦</td><td>សិស្សកត់ត្រានូវទំព័រលំហាត់ប្រតិបត្តិចូលសៀវភៅ និងស្ដាប់ដំបូន្មានលោកគ្រូ</td></tr>
</table>

អនុវត្តនិងណែនាំឱ្យសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍		

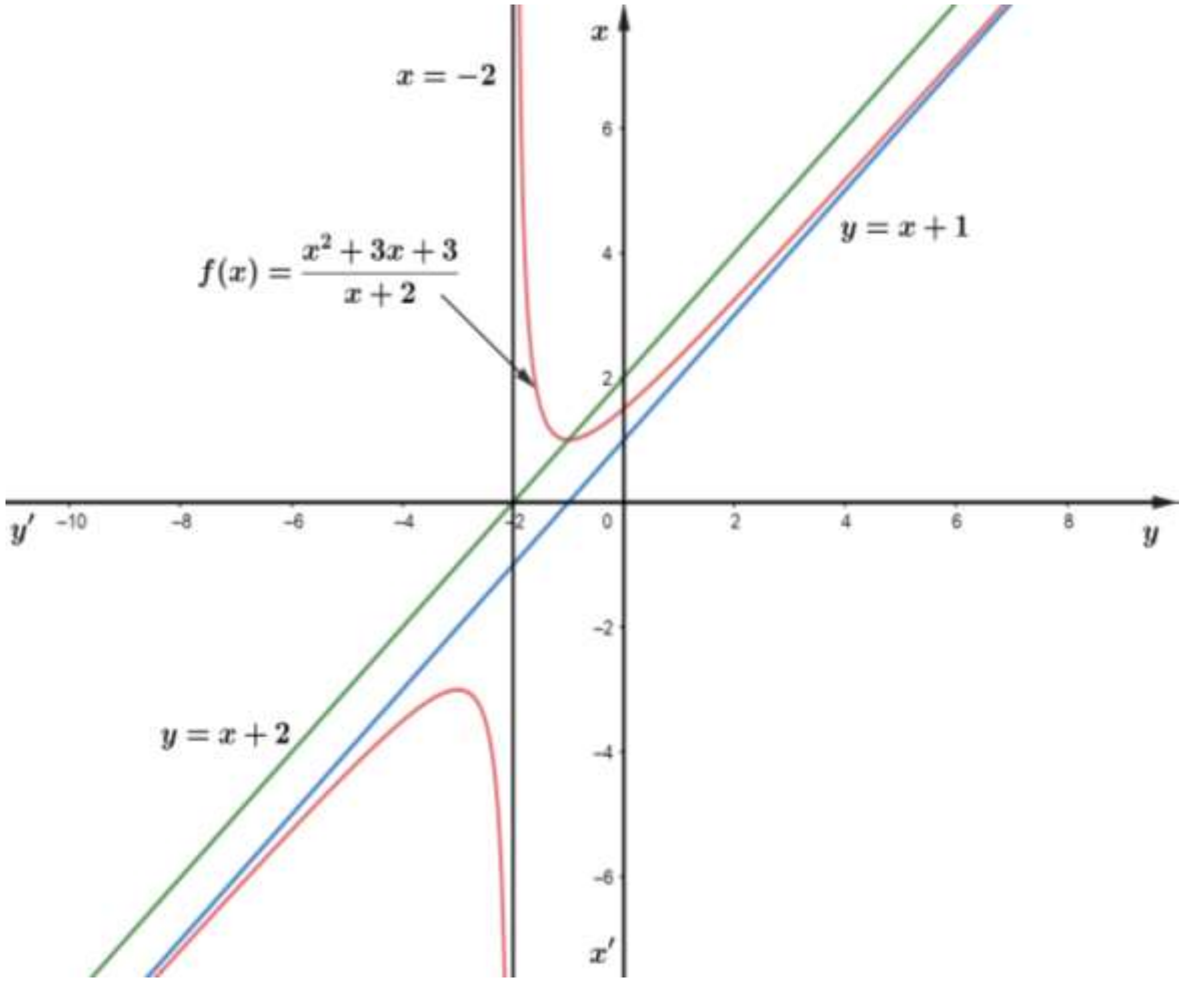
ខ្លឹមសារមេរៀនគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន

ជំពូកទី៣ មេរៀនទី១ នៃទំព័រ៦៣ដល់៦៥

ជំពូកទី៣ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប

មេរៀនទី១ អនុគមន៍សនិទាន

1. អនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$, $a\neq 0$



តាមរយៈរូបខាងលើយើងសង្កេតឃើញថា បន្ទាត់ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) និងបន្ទាត់ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ពីព្រោះផលសង $f(x)-(x+1)$ ខិតជិត 0 កាលណា x ខិតជិតអនន្ត។

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ មានក្រាប (C)។

ក. សរសេរ $f(x)$ ជាទម្រង់ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ រួចទាញរកតម្លៃ a,b,c ។

ខ. ទាញរកទំនាក់ទំនង $f(x)-(x+1)$ ។

គ. គណនា $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ ។

<u>ចម្លើយ៖</u> ក. សរសេរ f ជាទម្រង់ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ រួចទាញរកតម្លៃ a,b,c

មាន $f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$

ដោយចែកពហុធា គេបាន $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x+2}$

នាំឱ្យ $a=b=c=1$

វិធីផ្សេងទៀត

បើ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$

នោះ $f(x)=\dfrac{ax^2+(2a+b)x+(2b+c)}{x+2}$

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$

គេបាន $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=3 \\ 2b+c=3 \end{cases}$

នាំឱ្យ $a=b=c=1$

ខ. ទាញរកទំនាក់ទំនង $f(x)-(x+1)$

យើងបាន $f(x)-(x+1)=\dfrac{1}{x+2}$

គ. គណនា $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$

យើងបាន $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)=0$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$

នោះបន្ទាត់ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ។

ជាទូទៅ បន្ទាត់ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត កាលណា $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

សម្គាល់៖

- ដើម្បីរកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ គេត្រូវបម្លែងអនុគមន៍ជារាងកាណូនិកដែលមានទម្រង់ $y=mx+n+\dfrac{r}{px+q}$ ។
- អាស៊ីមតូតទ្រេតកើតមានចំពោះអនុគមន៍សនិទានដែលមានដឺក្រេភាគយកធំជាងភាគបែងមួយដឺក្រេ។

កិច្ចការផ្ទះ

- **ប្រតិបត្តិទី១៖** គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x+4+\dfrac{2}{x-1}$ មានក្រាប (C) ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d):y=x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអនុគមន៍ (C) ។

ចម្លើយទី១៖ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d):y=x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

គេមាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+4)\right]$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(x+4+\frac{2}{x-1}\right)-(x+4)\right]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x-1}\right)$$

$$=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(d):y=x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត។

- **ប្រតិបត្តិទី២៖** គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$ មានក្រាប (C) ។

ក. សរសេរ f ជាទម្រង់ $y=ax+b+\dfrac{c}{px+q}$ រួចទាញរកតម្លៃ a,b,c ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ។

ចម្លើយទី២៖

ក. សរសេរ f ជាទម្រង់ $y=ax+b+\dfrac{c}{px+q}$ រួចទាញរកតម្លៃ a,b,c

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$

$$y=\frac{x^2+2x+1+2}{x+1}$$

$$y=\frac{(x+1)^2}{x+1}+\frac{2}{x+1}$$

$$y=x+1+\frac{2}{x+1}$$

រួចទាញរកតម្លៃ a,b,c

$$\Rightarrow a=1, b=1, c=2$$

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(\frac{x^2+2x+3}{x+1}\right)-(x+1)\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x+3-x^2-2x-1}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x+1}\right)=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

លំហាត់បន្ថែម

១. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d)ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(C)តាងអនុគមន៍ f ខាងក្រោម៖

ក. $d: y = x - 2 \quad C: f(x) = x - 2 - \dfrac{3}{1-x}$

ខ. $d: y = x + 4 \quad C: f(x) = x + 4 + \dfrac{3}{2x-1}$

គ. $d: y = 2x + 3 \quad C: f(x) = 2x + 3 - \dfrac{2}{1+3x}$

ឃ. $d: y = x + 1 \quad C: f(x) = x + 1 - \dfrac{\ln x}{x}$

ង. $d: y = x + 2 \quad C: f(x) = (x+2)(e^x+1)$

២. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+3x-5}{x+1}$ មានក្រាប(C)។

ក. កំណត់ a,b និង c ដើម្បីឱ្យ f សរសេរបានជារាង $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to\pm\infty}\{f(x)-(x+2)\}$ រួចទាញយកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(C)។

៣. រកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = -x + 3 + \dfrac{3}{x-1}$

ខ. $y = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2-1}$

គ. $y = \dfrac{x^2+4x+1}{x+2}$

ឃ. $y = \dfrac{x^2-2}{x}$

ង. $y = \dfrac{x^2+2x-2}{x+1}$

ចម្លើយ៖ ១. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d)ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(C)តាងអនុគមន៍ f ខាងក្រោម៖

ក. $d: y = x - 2 \quad C: f(x) = x - 2 - \dfrac{3}{1-x}$

គេមាន $\lim\limits_{n\to\pm\infty}\{f(x)-(x+2)\}$

$\lim\limits_{n\to\pm\infty}\{x-2-\dfrac{3}{1-x}-(x+2)\}$

$\lim\limits_{n\to\pm\infty}\dfrac{3}{1-x}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ខ. $d: y = x+4 \quad C: f(x) = x+4+\dfrac{3}{2x-1}$

គេមាន $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(x+4)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x+4+\frac{3}{2x-1}\right)-(x+4)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3}{2x-1}\right]$$

$$=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d: y = x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

គ. $d: y = 2x+3 \quad C: f(x) = 2x+3-\dfrac{2}{1+3x}$

គេមាន $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(2x+3-\frac{2}{1+3x}\right)-(2x+3)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2}{1+3x}\right]=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d: y = 2x+3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

ឃ. $d: y = x+1 \quad C: f(x) = x+1-\dfrac{\ln x}{x}$

គេមាន $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x+1-\frac{\ln x}{x}\right)-(x+1)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{x}\right]=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d: y = x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

ង. $d: y = x+2 \quad C: f(x) = (x+2)(e^{x}+1)$

គេមាន $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[(x+2)(e^x+1)-(x+2)\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[(x+2)e^x\right]=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d: y=x+2$ ជាអាសីមតូតទ្រេត

II. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+3x-5}{x-1}$ មានក្រាប (C)។

ក. កំណត់ a,b និង c ដើម្បីឱ្យ f សរសេរបានជារាង $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$។

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+3x-5}{x-1}=x+2-\dfrac{7}{x+1}$

ដូចនេះ $a=1,b=2,c=-7$

ខ. គណនាលីមីត $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$រួចទាញរកអាសីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(c)

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x+2-\frac{7}{x+1}-(x+2)\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{7}{x+1}\right]=0$$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$ នោះ $y=x+2$ ជាអាសីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(c)

III. រកអាសីមតូតទ្រេតនៃអនុគមន៍

ក. $y=-x+3+\dfrac{3}{x-1}$

គេយក $f(x)=-x+3+\dfrac{3}{x-1}$

$d: y=-x+3$

គេបាន $=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-y\right]$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[-x+3+\frac{3}{x-1}-(x+3)\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3}{x-1}\right]=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d: y=-x+3$ អាសីមតូតទ្រេត

ខ. $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-1}$

គេយក $f(x)=-x+3+\dfrac{3}{x-1}$

ដោយ $=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-1}\right]=1$

នោះ អនុគមន៍ខាងលើគ្មានអាសីមតូតទ្រេតទេ ។

គ. $y=\dfrac{x^2+4x+1}{x+2}$

គេយក $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x+2}=x+2+\dfrac{-3}{x+2}$

$d:y=x+2$

គេបាន

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-y\right]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(x+2+\frac{-3}{x+2}\right)-(x+2)\right]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-3}{x+2}\right]=0$$

ដូចនេះបន្ទាត់ $d:y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

ឃ. $y=\dfrac{x^2-2}{x}$

គេយក $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x}=x-\dfrac{2}{x}$

$d:y=x$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-y\right]$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(x-\frac{2}{x}\right)-(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-2}{x}\right]=0$$

ដូចនេះបន្ទាត់ $d:y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

ង. $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x+1}$

គេយក $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x+1}=x+1-\dfrac{3}{x+1}$

$d:y=x+1$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-y\right]$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(x+1-\frac{3}{x+1}\right)-(x+1)\right]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-3}{x+1}\right]=0$$

ដូចនេះបន្ទាត់ $d:y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត។

កិច្ចតែងការបង្រៀនគំរូទី៣

កាលបរិច្ឆេទ៖ ថ្ងៃ ចន្ទ ២ រោច ខែ កត្តិក ឆ្នាំ ជូត ទោស័ក ព . ស ២៥៦៤
ត្រូវនឹងថ្ងៃទី ០២ ខែ វិច្ឆិកា ឆ្នាំ ២០២០

មុខវិជ្ជា៖ គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី៖ ១២ (កម្រិតមូលដ្ឋាន)

ជំពូកទី ៣៖ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប

មេរៀនទី១៖ អនុគមន៍សនិទាន

១. អនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

១.១ អាសុីមតូតទ្រេត

រយៈពេល៖ ៥០ នាទី

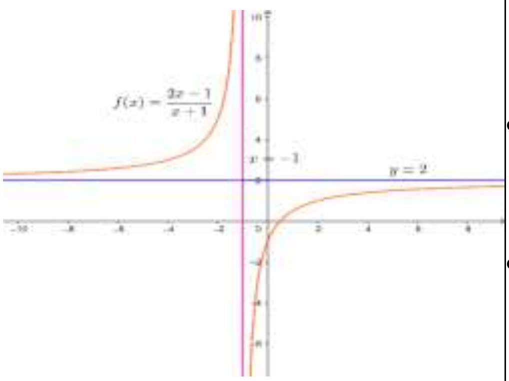
I. **វត្ថុបំណង** ៖ ក្រោយពីបានសិក្សាខ្លឹមសារមេរៀននេះចប់សិស្ស៖

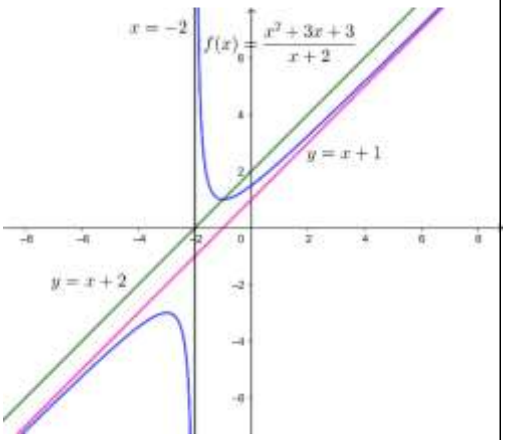
- **វិជ្ជាសម្បទា៖** កំណត់បានពីនិយមន័យ និងរបៀបរកសមីការបន្ទាត់អាសុីមតូតទ្រេតតាមរយៈការពិភាក្សាជាក្រុម ។
- **បំណិនសម្បទា៖** រកសមីការបន្ទាត់អាសុីមតូតទ្រេតបានតាមរយៈពិភាក្សាជាក្រុម (ជាដៃគូ) ។
- **ចរិយាសម្បទា៖** មានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការរៀនសូត្រ និងសហការគ្នា ។

II. **សម្ភារឧបទេស៖** សៀវភៅសិក្សាគោល បន្ទាត់ក្រិត ប៉ារ៉ាបូល

III. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** វិធីបង្រៀនតាមលំនាំគំរូ 5Es

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	**សកម្មភាពសិស្ស**
ជំហានទី១៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់រៀន(០៣នាទី)		
ពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និង សណ្តាប់ធ្នាប់ថ្នាក់រៀន		ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២៖ រំលឹកមេរៀនចាស់(០៥នាទី)		
ចូររកអាសុីមតូតឈរ និង អាសុីមតូតដេកនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ ។		**ចម្លើយ** • រកអាសុីមតូតឈរ នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ • ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>គេបាន
$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{x+1}=\pm\infty$
ដូចនេះ សមីការ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ
-រកអាស៊ីមតូតដេក
$\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2$
ដូចនេះ សមីការ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (c) ។</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">ជំហានទី៣៖ មេរៀនថ្មី (៣០នាទី)</td>
</tr>
<tr>
<td>ចូលរួម (Engage)
គ្រូបង្ហាញក្រាបនៃអនុគមន៍
$y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$ និងបន្ទាត់
$y=x+2$, $y=x+1$
និងពន្យល់ពីទំនាក់ទំនងរវាងក្រាប និងបន្ទាត់ ។
• តើបន្ទាត់ណាខ្លះជាបន្ទាត់អាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង ?
• ចូរប្អូនសង្កេតពីអាស៊ីមតូតទ្រេត និងក្រាប និងរកលក្ខណៈពិសេសណាមួយរបស់វា។</td>
<td>ជំពូក៣ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប
មេរៀនទី១ អនុគមន៍សនិទាន
១. អនុគមន៍ $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$
១.១ អាស៊ីមតូតទ្រេត

ឧទាហរណ៍៖ គេឲ្យអនុគមន៍
$y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$ មានក្រាប (c) ។
ក.សរសេរ f ជាទម្រង់
$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$
រួចទាញរកតម្លៃ a,b,c ។
ខ.ទាញរកទំនាក់ទំនង $f(x)-(x+1)$</td>
<td>ចូលរួម (Engage)
សិស្សសង្កេត និងស្តាប់ការពន្យល់របស់គ្រូ និងសង្កេតលើក្រាប

• បន្ទាត់ $x=-2, y=x+1$ ជាបន្ទាត់អាស៊ីមតូត
• សង្កេតលើក្រាបរិះគិតរក
ចម្លើយ៖
• ផលសងរវាងក្រាប និងអាស៊ីមតូតទ្រេតខិតទៅរក 0 កាលណា x ខិតជិត $\pm\infty$ មានន័យថា $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$</td>
</tr>
</table>

រុករក និងពន្យល់ **(Explore and Explain)** • ឲ្យសិស្សពិភាក្សាតាមក្រុម ដើម្បីទាញបានលក្ខណៈទូទៅនៃអាស៊ីតតូតទ្រេត	គ.គណនា $\left[f(x)-(x+1)\right]$ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c) **ចម្លើយ៖** ក.សរសេរ f ជាទម្រង់ $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$ រួចទាញរកតម្លៃ a,b,c $f(x)=x+1+\frac{1}{x+2}$ យើងបាន $a=b=c=1$ ខ.ទាញរកទំនាក់ទំនង $f(x)-(x+1)$ យើងបាន $f(x)-(x+1)=x+1+\frac{1}{x+2}-(x+1)$ $=\frac{1}{x+2}$ គ.គណនា $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x+2}\right)$ ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ នោះ បន្ទាត់ $y=x+1$ជាអាស៊ីតតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (c) **ជាទូទៅ** បើ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$	**រុករក និងពន្យល់** **(Explore and Explain)** ពិភាក្សាជាក្រុមដើម្បីរុករក **ចម្លើយ៖** • សិស្សធ្វើការកត់សម្គាល់ក្នុងការកគណត់សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត ដោយសរសេរជាទម្រង់កាណូនិច្ច។ (ចម្លើយរបស់សិស្សដូចមានក្នុងកូរឡោនខ្លឹមសារ) **ចម្លើយ៖** ក.សរសេរ f ជាទម្រង់ $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$ រួចទាញរកតម្លៃ a,b,c $f(x)=x+1+\frac{1}{x+2}$ យើងបាន $a=b=c=1$ ខ.ទាញរកទំនាក់ទំនង $f(x)-(x+1)$ យើងបាន $f(x)-(x+1)=x+1+\frac{1}{x+2}-(x+1)$ $=\frac{1}{x+2}$ គ.គណនា $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ $=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x+2}\right)$ ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ នោះបន្ទាត់ $y=x+1$ជាអាស៊ីតតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (c)

<table>
<tr>
<td>**បញ្ជាក់លម្អិត (Elaborate)**
• ឱ្យសិស្សទាញជាទូទៅកម្ម ក្នុងការកំណត់សមីការអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង ។</td>
<td>នោះបន្ទាត់ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត។
សម្គាល់
• ដើម្បីរកអាស៊ីតតូតទ្រេតនៃអនុគមន៍ $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$ គេត្រូវបម្លែងអនុគមន៍វាជារាងកាណូនិកដែលមានទម្រង់ $y=mx+n+\frac{k}{px+q}$</td>
<td>**បញ្ជាក់លម្អិត (Elaborate)**
សម្គាល់
• ដើម្បីរកអាស៊ីតតូតទ្រេតនអនុគមន៍ $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$ គេត្រូវបំប្លែងអនុគមន៍វាជារាងកាណូនិកដែលមានទម្រង់ $y=mx+n+\frac{k}{px+q}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">**ជំហានទី៤.** ពង្រឹងពុទ្ធិ(១០នាទី)</td>
</tr>
<tr>
<td>**វាយតម្លៃ (Evaluate)**
• ដើម្បីបង្ហាញថាបន្ទាត់ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអនុគមន៍សនិទាន $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$ តើយើងត្រូវធ្វើដូចម្តេច ?
• ឱ្យសិស្សធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិធ្វើជាដៃគូ</td>
<td>• សរសេរអនុគមន៍ $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$ ជារាងកាណូនិច $y=mx+n+\frac{r}{px+q}$
• បង្ហាញថា $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$
រួចសន្និដ្ឋាន</td>
<td>**វាយតម្លៃ (Evaluate)**
• សរសេរអនុគមន៍ $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$ ជារាងកាណូនិច $y=mx+n+\frac{r}{px+q}$
• បង្ហាញថា $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$
រួចសន្និដ្ឋាន</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">**ជំហានទី៥៖** បណ្តាំផ្ញើ(០២នាទី)</td>
</tr>
<tr>
<td>• ដាក់កិច្ចការផ្ទះ</td>
<td>ប្រតិបត្តិ១៖គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=x+4+\frac{2}{x-1}$ មានក្រាប (c)។
បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d):y=x+4$ ជាអាស៊ីមតទ្រេតនៃអនុគមន៍ (c)។
ប្រតិបត្តិ២៖
គេឲ្យអនុគមន៍ $y=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$ មានក្រាប (c)។</td>
<td>• កត់ត្រាកិច្ចការផ្ទះ</td>
</tr>
</table>

	ក.សរសេរ f ជាទម្រង់ $y=f\left(x\right)=ax+b+\dfrac{c}{px+q}$ រួចទាញរកតម្លៃ a,b,c ។ ខ.រកអាស៊ីតតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (c) ។	